Механика

УДК 539.3

РАСТЯЖЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО КОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ

Г. З. Шарафутдинов[1]

Получено точное аналитическое решение задачи о растяжении бесконечно длинного сплошного круглого цилиндра и неразрывно связанного с ним внешнего полого круглого цилиндра, т.е. конструкции, представляющей собой композитный стержень, составные части которого выполнены из упругих материалов с различными механическими характеристиками. При развитии метода решения используется ранее предложенный автором подход к задачам о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке, позволяющий в данном случае интегрировать уравнения равновесия в конечном виде. Приводятся некоторые сведения о распределении перемещений и напряжений в стержне.

Ключевые слова: теория упругости, осесимметричная задача, составной круглый стержень, растяжение, метод решения, точное аналитическое решение.

An exact analytical solution of the problem of stretching an infinitely long continuous round cylinder and an inextricably linked with it external hollow round cylinder, i.e., a composite rod, the component parts of which are made of elastic materials with different mechanical characteristics is obtained. In the development of the solution method, the previously proposed by the author approach to the problems of plane stress state in the spatial formulation, allowing in this case integrate the equilibrium equations in the finite form is used. Some information about the distribution of displacements and stresses in the rod is given.

Key words: theory of elasticity, axisymmetric problem, compound round rod, stretching, solution method, exact analytical solution.

1. Введение. Рассмотрим бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса a из однородного упругого материала (модуль сдвига μ_1, коэффициент Пуассона ν_1), расположенный внутри полого круглого цилиндра с внутренним радиусом a и внешним радиусом b, выполненного из другого однородного упругого материала (модуль сдвига μ_2, коэффициент Пуассона ν_2). Будем считать, что цилиндры неразрывно связаны между собой по всей поверхности контакта. Систему цилиндрических координат r, ϑ, z расположим так, чтобы ось Oz была направлена по оси внутреннего цилиндра. Допустим, что на рассматриваемую конструкцию на бесконечности действует направленная вдоль координатной оси Oz растягивающая сила P.

Решение задач такого рода, несомненно, имеет большое значение при анализе напряженно-деформированного состояния в теории композитных материалов, при разработке технологических процессов, связанных, например, с вытяжкой электрических кабелей или оптоволокон в случае наличия изолирующего или защитного слоя, и во многих других технических приложениях теории упругости.

Подобные задачи в общей трехмерной постановке, как отмечается в [1], являются одними из труднейших в теории упругости; преодоление математических трудностей возможно с использованием полуобратного метода. По этой причине для решения рассматриваемой задачи мы применим подход [2], при помощи которого был разработан метод решения задач теории упругости о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке, позволивший получить точные аналитические решения задач этого класса. Указанный подход базировался на необходимости учета перемещений в перпендикулярном к средней плоскости пластинок направлении, в связи с чем компоненты перемещения в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ принимались в виде [2]

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \qquad u_2 = u_2(x_1, x_2), \qquad u_3 = g(x_1, x_2)x_3,$$

где $g(x_1, x_2)$ — некоторая дифференцируемая функция.

[1] *Шарафутдинов Геннадий Зиатдинович* — доктор техн. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: sharaf@imec.msu.ru.

Sharafutdinov Gennady Ziatdinovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher, Lomonosov Moscow State University Institute of Mechanics.

В работе [2] было также установлено, что реализация предложенного подхода приводит к удовлетворению всех без исключения уравнений теории упругости, подтверждением чего являются точные аналитические решения ряда задач теории упругости о плоском напряженном состоянии [3].

2. Метод решения. Общее решение. В рассматриваемом здесь случае выражения для радиального, окружного и продольного перемещений в силу наличия осевой симметрии примут вид

$$u = u(r), \qquad v = 0, \qquad w = g(r)z.$$

При этом компоненты тензора деформаций, в общем случае выражаемые соотношениями

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r}, \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right), \qquad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \qquad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right),$$

равны

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du(r)}{dr}, \qquad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u(r)}{r}, \qquad \varepsilon_{zz} = g(r), \qquad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\frac{dg(r)}{dr}\,z.$$

Остальные компоненты деформаций равны нулю. Компоненты напряжений σ_{ij} запишем при помощи закона Гука:

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = 2\mu\left[\frac{\nu I_1}{1-2\nu} + \frac{du(r)}{dr}\right], \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2\mu\left[\frac{\nu I_1}{1-2\nu} + \frac{u(r)}{r}\right], \\ \sigma_{zz} = 2\mu\left[\frac{\nu I_1}{1-2\nu} + g(r)\right], \qquad \sigma_{rz} = \mu\,\frac{dg(r)}{dr}\,z,\end{gathered} \tag{1}$$

где μ — параметр Ламе, ν — коэффициент Пуассона,

$$I_1(r) = \frac{du(r)}{dr} + \frac{u(r)}{r} + g(r)$$

— первый инвариант тензора деформаций. Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю.

Такой подход к плоским задачам теории упругости позволяет за счет выбора вида функции $g = g(x_1, x_2)$ выделить необходимый для исследований тип задач, в частности дает возможность исследовать задачи о плоской деформации (в случае $g = 0$) или математически тождественные с ними задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии. В случае $g = \text{const} \neq 0$ с его помощью можно решать задачи об осевом деформировании круглых цилиндрических тел, а в случае $g = g(x_1, x_2)$ — задачи о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке [2].

Два из уравнений равновесия для упомянутых здесь осесимметричных плоских задач принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0.$$

Третье уравнение равновесия тождественно удовлетворяется. Подставляя в уравнения равновесия выражения (1) для компонент тензора напряжения, получим

$$2\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{dI_1}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2}\right] + 2\left[\frac{du}{rdr} - \frac{u}{r^2}\right] + \frac{dg}{dr} = 0, \tag{2}$$

$$r\,\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{dg}{dr} = 0. \tag{3}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{dI_1}{dr} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{rdr} - \frac{u}{r^2} + \frac{dg}{dr},$$

уравнение (2) преобразуем к виду

$$2\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right] + \frac{1}{1-2\nu}\,\frac{dg}{dr} = 0.$$

Затем, учитывая соотношение
$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,(ru)\,,$$
окончательно получим
$$2(1-\nu)\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,(ru)\right]=-\frac{dg}{dr}. \tag{4}$$

Уравнение (3) запишем в удобном для интегрирования виде:
$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dg}{dr}\right)=0.$$

Интегрируя его, последовательно находим
$$\frac{dg(r)}{dr}=\frac{A}{r},\qquad g(r)=A\ln r+B, \tag{5}$$

где A и B — постоянные интегрирования. Интегрируя выражение (4) и используя (5), получим
$$u(r)=-\frac{A}{8(1-\nu)}\,r\,(2\ln r-1)+\frac{C}{2}\,r+\frac{D}{r}, \tag{6}$$

где C и D — постоянные интегрирования.

С учетом выражений (5) и (6) компоненты тензоров деформаций ε_{ij} примут вид
$$\varepsilon_{rr}=-\frac{A}{8(1-\nu)}\,(2\ln r+1)+\frac{C}{2}-\frac{D}{r^2}, \tag{7}$$
$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}=-\frac{A}{8(1-\nu)}\,(2\ln r-1)+\frac{C}{2}+\frac{D}{r^2}, \tag{8}$$
$$\varepsilon_{zz}=A\ln r+B, \tag{9}$$
$$\varepsilon_{rz}=\frac{A}{2}\,\frac{z}{r}, \tag{10}$$
а первый инвариант тензора деформаций — вид
$$I_1=\frac{1-2\nu}{2(1-nu)}\,A\ln r+B+C.$$

Компоненты тензора напряжений в силу (1) запишутся следующим образом:
$$\sigma_{rr}=2\mu\left[\left(-\frac{1-2\nu}{4(1-2\nu)}\ln r-\frac{1}{8(1-\nu)}\right)A+\frac{\nu B}{1-2\nu}+\frac{C}{2(1-2\nu)}-\frac{D}{r^2}\right], \tag{11}$$
$$\sigma_{\vartheta\vartheta}=2\mu\left[\left(-\frac{1-2\nu}{4(1-2\nu)}\ln r+\frac{1}{8(1-\nu)}\right)A+\frac{\nu B}{1-2\nu}+\frac{C}{2(1-2\nu)}+\frac{D}{r^2}\right], \tag{12}$$
$$\sigma_{zz}=2\mu\left(\frac{2-\nu}{2(1-\nu)}\,A\ln r+\frac{1-\nu}{1-2\nu}\,B+\frac{\nu}{1-2\nu}\,C\right), \tag{13}$$
$$\sigma_{rz}=\mu\,\frac{z}{r}\,A. \tag{14}$$

Непосредственно проверено, что приведенные выражения для компонент напряжений, полученные при помощи выражений (5) и (6), удовлетворяют уравнениям равновесия и поэтому соотношения (5)–(14) для перемещений, деформаций и напряжений, представленные с использованием неизвестных коэффициентов A, B, C и D, являются общим решением для задач рассматриваемого класса.

3. Решение задачи о растяжении кусочно-однородного композитного стержня. Очевидно, что при наличии соотношений (5)–(14) решение каждой конкретной задачи из выделенного здесь класса задач сводится к определению неизвестных коэффициентов A, B, C и D при помощи граничных условий. В рассматриваемой здесь задаче они имеют вид

$$
\begin{gathered}
u^{(1)}(a)=u^{(2)}(a), \quad \sigma_{rr}^{(1)}(a)=\sigma_{rr}^{(2)}(a), \quad \sigma_{rr}^{(2)}(b)=0, \\
\int\limits_0^a \sigma_{zz}^{(1)} r\,dr+\int\limits_a^b \sigma_{zz}^{(2)} r\,dr=\frac{P}{2\pi}.
\end{gathered} \tag{15}
$$

Верхним индексом (1) обозначен внутренний цилиндр, индексом (2) — внешний. Таким образом, искомое решение рассматриваемой задачи будет найдено, если будет определено восемь неизвестных коэффициентов $A_1,\ldots,D_2$. Наличие только четырех соотношений (15), как нетрудно видеть, не является препятствием для решения этой проблемы. Суть дела состоит в том, что помимо граничных условий имеется еще и другая группа соотношений, которую условно можно назвать "ограничительные условия", в большинстве случаев выполняющиеся по умолчанию. В частности, для исключения нерегулярности решения при $r=0$ полагаем $A_1=0$ и $D_1=0$. Кроме того, неразрывность соединения составных частей рассматриваемой конструкции и ее бесконечная протяженность при учете соотношения (9) приводят к заключению, что $A_2=0$ и $B_1=B_2=B$. Таким образом, определению подлежат только четыре коэффициента B, C_1, C_2 и D_2, что точно соответствует числу граничных условий (15).

Выражения для компонент вектора перемещений, компонент тензоров деформаций и напряжений для сплошного внутреннего цилиндра и внешней полой трубы, выполненных из разных упругих материалов, имеют вид

$$
\begin{gathered}
u=C_1\frac{r}{2}, \quad \varepsilon_{rr}=\varepsilon_{\vartheta\vartheta}=\frac{C_1}{2}, \quad \varepsilon_{zz}=B, \\
\sigma_{rr}=\sigma_{\vartheta\vartheta}=2\mu_1\left[\frac{\nu_1 B}{1-2\nu_1}+\frac{C_1}{2(1-2\nu_1)}\right], \quad \sigma_{zz}=2\mu_1\left[\frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1}B+\frac{\nu_1}{1-2\nu_1}C_1\right].
\end{gathered} \tag{16}
$$

И соответственно

$$
\begin{gathered}
u=C_2\frac{r}{2}+\frac{D_2}{r}, \quad \varepsilon_{rr}=\frac{C_2}{2}-\frac{D_2}{r^2}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta}=\frac{C_2}{2}+\frac{D_2}{r^2}, \quad \varepsilon_{zz}=B, \\
\sigma_{rr}=2\mu_2\left[\frac{\nu_2 B}{1-2\nu_2}+\frac{C_2}{2(1-2\nu_2)}-\frac{D_2}{r^2}\right], \quad \sigma_{\vartheta\vartheta}=2\mu_2\left[\frac{\nu_2 B}{1-2\nu_2}+\frac{C_2}{2(1-2\nu_2)}+\frac{D_2}{r^2}\right], \\
\sigma_{zz}=2\mu_2\left[\frac{1-\nu_2}{1-2\nu_2}B+\frac{\nu_2}{1-2\nu_2}C_2\right].
\end{gathered} \tag{17}
$$

Реализуя последовательно условия (15), при учете соотношений (16) и (17) приходим к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов: C_1 для первого цилиндра, C_2, D_2 для второго и общего коэффициента B для обоих цилиндров:

$$
\begin{gathered}
C_1\frac{a}{2}=C_2\frac{a}{2}+\frac{D_2}{a}, \\
2\mu_1\left[\frac{\nu_1 B}{1-2\nu_1}+\frac{C_1}{2(1-2\nu_1)}\right]=2\mu_2\left[\frac{\nu_2 B}{1-2\nu_2}+\frac{C_2}{2(1-2\nu_2)}-\frac{D_2}{a^2}\right], \\
2\mu_2\left[\frac{\nu_2 B}{1-2\nu_2}+\frac{C_2}{2(1-2\nu_2)}-\frac{D_2}{b^2}\right]=0, \\
\mu_1\left[\frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1}B+\frac{\nu_1}{1-2\nu_1}C_1\right]a^2+\mu_2\left[\frac{1-\nu_2}{1-2\nu_2}B+\frac{\nu_2}{1-2\nu_2}C_2\right](b^2-a^2)=\frac{P}{2\pi}.
\end{gathered}
$$

Упростим приводимую систему уравнений. Сначала из третьего уравнения найдем

$$
D_2=\frac{\nu_2 b^2}{1-2\nu_2}B+\frac{b^2}{2(1-2\nu_2)}C_2, \tag{18}
$$

а затем из первого

$$C_1 = C_2 + \frac{2}{a^2} D_2. \tag{19}$$

Используя соотношения (18) и (19), получим систему уравнений

$$a_{11}B + a_{12}C_2 = b_1, \quad a_{21}B + a_{22}C_2 = b_2, \tag{20}$$

где

$$a_{11} = 2\mu_1[\nu_2 b^2 + \nu_1(1-2\nu_2)a^2] + 2\mu_2\nu_2(1-2\nu_1)(b^2-a^2),$$
$$a_{12} = \mu_1[b^2 + (1-2\nu_2)a^2] + \mu_2(1-2\nu_1)(b^2-a^2),$$
$$a_{21} = \mu_1[2\nu_1\nu_2 b^2 + (1-\nu_1)(1-2\nu_2)a^2] + \mu_2(1-2\nu_1)(1-\nu_2)(b^2-a^2),$$
$$a_{22} = \mu_1\nu_1[b^2 + (1-2\nu_2)a^2] + \mu_2\nu_2(1-2\nu_1)(b^2-a^2),$$
$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)P}{2\pi}.$$

Решение итоговой системы уравнений и общее решение поставленной задачи определяются соотношениями

$$B = \frac{d_1}{d}, \quad C_2 = \frac{d_2}{d}, \quad D_2 = \frac{C_2 + 2\nu_2 B}{2(1-2\nu_2)}\, b^2, \quad C_1 = C_2 + \frac{2}{a^2} D_2, \tag{21}$$

где

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad d_1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2, \quad d2 = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

В случае $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ рассматриваемая конструкция представляет собой однородный стержень. Коэффициенты системы (20) при этом примут вид

$$a_{11} = 2\nu, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = (1 - 3\nu + 4\nu^2)\mu b^2, \quad a_{22} = 2\nu(1-\nu)\mu b^2,$$

а ее решение — вид

$$B = \frac{1}{E}\,\frac{P}{\pi b^2}, \quad C_1 = C_2 = -\frac{2\nu}{E}\,\frac{P}{\pi b^2}, \quad D_2 = 0,$$

где E — модуль Юнга. Используя любую из совпадающих в этом случае групп соотношений (16) или (17), здесь, в отличие от работы [4], получаем решение задачи об осевом растяжении стержня без каких-либо априорных сведений о характере действующих в нем напряжений:

$$u = -\frac{\nu}{E}\,\frac{P}{\pi b^2}\, r, \quad w = \frac{1}{E}\,\frac{P}{\pi b^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{r\vartheta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\vartheta z} = 0, \quad \sigma_{zz} = \frac{P}{\pi b^2}. \tag{22}$$

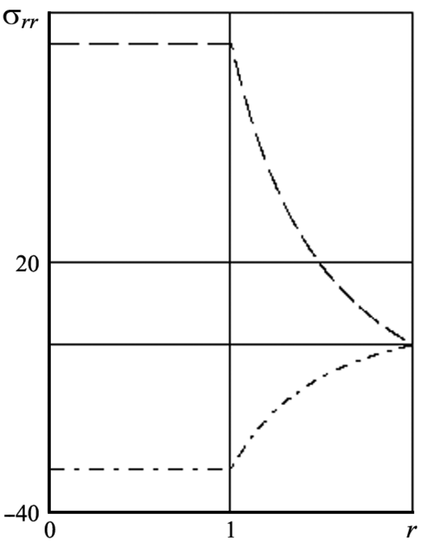

Рис. 1

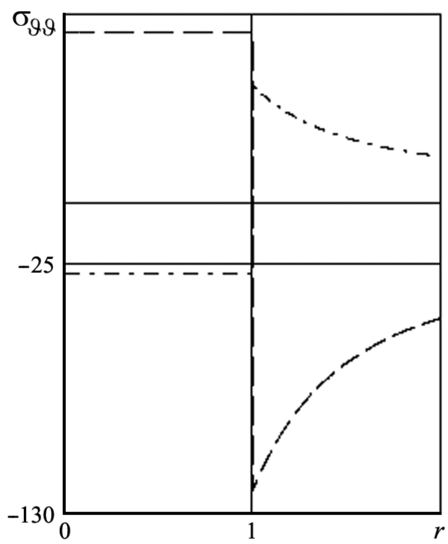

Рис. 2

Допустим, что композитный цилиндр выполнен из материалов M1 ($\mu = 100\,000$, $\nu = 0.3$) и M2 ($\mu = 20\,000$, $\nu = 0.495$). Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров примем равными 1 и 2 соответственно. Растягивающая сила, действующая вдоль оси стержня, принимается равной 7 500. Здесь и далее для упрощения используются безразмерные величины.

Определим компоненты тензора напряжений при различных сочетаниях материалов. Для однородного цилиндра в соответствии с (22) имеем $\sigma_{rr} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = 0$, $\sigma_{zz} = 596.8$. Они отмечены сплошными линиями на рис. 1–3 соответственно. Допустим теперь, что внутренний цилиндр выполнен из материала М1, а внешний — из М2. Учитывая решение (21) и используя нужные выражения из наборов (16) и (17), находим зависимости σ_{rr}, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ и σ_{zz}, в таком же порядке представленные штрихпунктирными линиями на рис. 1–3. Точно так же, считая внутренний цилиндр выполненным из материала М2, а внешний — из М1, получим зависимости σ_{rr}, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ и σ_{zz}, в той же последовательности приведенные пунктирными линиями на рис. 1–3. Аналогичным образом на рис. 4 представлены зависимости радиального перемещения $u(r)$ от радиуса. Видно, что они, как и радиальные напряжения $\sigma_{rr}(r)$, во всех случаях непрерывны на стыке слоев.

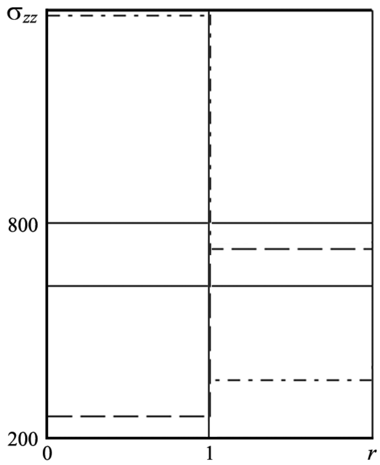

Рис. 3

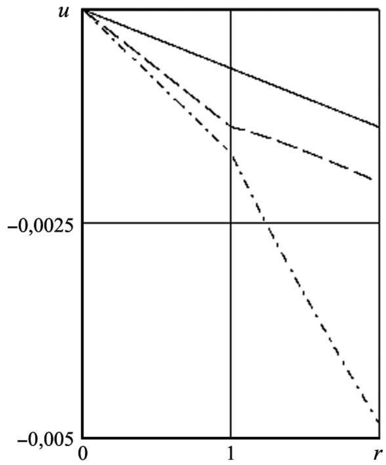

Рис. 4

Таким образом, в работе предложен и на конкретном примере двухслойного стержня реализован метод решения задач об осевом нагружении составных круглых цилиндрических тел, легко распространяемый на многослойные конструкции такого вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988.
2. *Шарафутдинов Г.З.* Применение функций комплексного переменного к некоторым пространственным задачам теории упругости // Прикл. матем. и механ. 2000. **64**, вып. 4. 659–669.
3. *Шарафутдинов Г.З.* Некоторые плоские задачи теории упругости. М.: Научный мир, 2014.
4. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
25.04.2018

УДК 539.3:534.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ИМПЕДАНСНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА ОДНОЙ ИЗ ЕЕ СТОРОН И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗВУКОВЫМ БАРЬЕРАМ

М. Ш. Исраилов[1]

Предложен метод и получены простые аналитические решения задач дифракции акустических волн на полуплоскости, на одной из сторон которой задано импедансное краевое условие, а на другой — условие Неймана или Дирихле. Показано, что свойства полученных решений имеют существенное значение для оптимального проектирования звуковых барьеров с абсорбирующими стенками.

[1] *Исраилов Мухади Шахидович* — доктор физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. Комплексного НИИ РАН, г. Грозный, e-mail: israiler@hotmail.com.

Israilov Mukhady Shakhidovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Complex Research Institute of Russian Academy of Sciences (Grozny).