кратность любого собственного значения этой матрицы равна 1. Числа c_s из формулировки теоремы 3 — это компоненты собственного вектора, соответствующего собственному значению z_1 этой матрицы, при этом $c_1 \neq 0$.

Теорема 3 при $k = 0$ является частным случаем одной теоремы из работы [4] (см. также [5, теорема 5]). Работы [4, 5] содержат и сведения о возникновении многочлена, аналогичного $\mathcal{F}_{2n+1}(z, \nu, k)$, для симметрических дифференциальных уравнений с аналитическими на бесконечности коэффициентами и о его роли в вопросах асимптотического поведения решений этих уравнений на бесконечности.

В работе [6] сформулированы аналоги теорем 1–3 для дифференциальных уравнений

$$(-1)^n (p(x) y^{(n)})^{(n)} + q(x) y = \lambda y,$$

где функция p такова, что $p, 1/p \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, а q — обобщенная функция, представимая в виде $q = \sigma^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, причем

$$\sigma \in L^1_{\mathrm{loc}}(I), \quad \text{если } k < n, \qquad \text{и} \qquad \frac{\sigma^2}{p} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I), \quad \text{если } k = n.$$

Там же приведены доказательства соответствующих теорем для случая $n = 1$.

Результаты, представленные в теоремах 1 и 2, получены при поддержке РНФ, грант № 17–11–01215; результаты, представленные в теореме 3, получены при поддержке РФФИ, грант № 18–01–00250.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Everitt W.N., Marcus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // AMS. Mathematical Surveys and Monographs. 1999. Vol. 61
2. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
4. *Мирзоев К.А.* О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2001. **380**, № 5. 591–595.
5. *Мирзоев К.А., Долгих И.Н.* Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов // Матем. сб. 2006. **197**, № 4. 53–74.
6. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. 2018. **104**, № 2. 231–242.

Поступила в редакцию
12.04.2019

УДК 517.518.2

О СВЯЗИ m-ЧЛЕННЫХ И НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ l_p

Н. Л. Кудрявцев[1]

В пространствах l_p получены соотношения между m-членными и наилучшими приближениями последовательностей, удовлетворяющих условиям типа монотонности.

Ключевые слова: m-членное приближение, почти убывающая последовательность, квазимонотонная последовательность, локально почти убывающая последовательность,

[1] *Кудрявцев Николай Львович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: nilkud@mech.math.msu.su.

Kudryavtsev Nickolai Lvovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Mathematical Analysis.

неубывающая перестановка последовательности, абсолютная сходимость ряда из коэффициентов Фурье.

Relations between the best m-term and best approximations in the spaces l_p are studied for complex-valued sequences whose absolute values satisfy monotonicity-type conditions.

Key words: m-term approximation, almost decreasing sequence, quasi-monotone sequence, locally almost decreasing sequence, non-increasing rearrangement of a sequence, absolute convergence of Fourier coefficients series.

Введение. Обозначим через l_p, $0 < p < \infty$, векторное пространство комплекснозначных последовательностей $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ с конечной (квази)нормой

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p},$$

а через l_∞ векторное пространство комплекснозначных последовательностей, стремящихся к нулю, с нормой

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_{n \geqslant 1} |a_n|.$$

Последовательности $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 стоит на n-м месте) образуют базис в пространствах l_p, $0 < p \leqslant \infty$. Пусть $X_m = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$, $m = 1, 2, \dots$, и $\mathbf{a} \in l_p$. Величины

$$E_m(\mathbf{a})_p = \inf_{\mathbf{b} \in X_m} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_p$$

являются наилучшими приближениями последовательности $\mathbf{a}$ последовательностями из X_m. Также рассмотрим множества Σ_m, состоящие из всех последовательностей, разложения которых по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ имеют не более m ненулевых коэффициентов. Для последовательности $\mathbf{a}$ величина

$$\sigma_m(\mathbf{a})_p = \inf_{\mathbf{u} \in \Sigma_m} \|\mathbf{a} - \mathbf{u}\|_p$$

называется наилучшим m-членным приближением последовательности $\mathbf{a}$ в l_p. Приближения такого рода были введены в [1] (об m-членных приближениях см. в обзоре [2]).

Ясно, что для любой последовательности $\mathbf{a} \in l_p$ и любого натурального m выполнено неравенство $\sigma_m(\mathbf{a})_p \leqslant E_m(\mathbf{a})_p$. Также очевидно, что если модули членов последовательности $\mathbf{a}$ убывают, то $\sigma_m(\mathbf{a})_p = E_m(\mathbf{a})_p$. Поэтому возникает естественный вопрос: как связаны m-членные и наилучшие приближения для других классов последовательностей? В настоящей работе рассматриваются классы последовательностей, абсолютные значения членов которых удовлетворяют некоторым условиям типа монотонности.

Определения и формулировки. Очевидно, что

$$E_m(\mathbf{a})_p = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty, \ \text{и} \ E_m(\mathbf{a})_\infty = \max_{n > m} |a_n|.$$

Величину $\sigma_m(\mathbf{a})_p$ удобно выражать через неубывающую перестановку $\mathbf{a}^*$ последовательности $\mathbf{a} \in l_p$, которая определяется следующим образом: $a_1^* = \max_{l \geqslant 1} |a_l|$, т.е. $a_1^* = |a_{k(1)}|$ (если максимум достигается на нескольких членах последовательности, то в качестве $k(1)$ берем минимальный из таких номеров). Далее, $a_2^* = \max_{l \neq k(1)} |a_l|$. Тогда $a_2^* = |a_{k(2)}|$, где $k(2)$ — минимальный из таких номеров k, что $|a_k| = a_2^*$. Продолжая этот процесс, получаем, что $a_n^* = \max_{l \neq k(1), \dots, k(n-1)} |a_l|$, $a_n^* = |a_{k(n)}|$. И в результате имеем неубывающую последовательность $\mathbf{a}^* = (a_n^*)$, называемую неубывающей перестановкой последовательности $\mathbf{a}$. Тогда

$$\sigma_m(\mathbf{a})_p = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^{*\,p}\right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty, \ \sigma_m(\mathbf{a})_\infty = \max_{n > m} a_n^*.$$

Через $|\mathbf{a}|$ будем обозначать последовательность, члены которой совпадают с абсолютными значениями соответствующих членов последовательности $\mathbf{a}$, а через $[x]$ — целую часть действительного числа x.

Постоянные в разных формулах обозначаются одной и той же прописной буквой C и могут отличаться друг от друга на протяжении одной выкладки. Запись "$A_n \asymp B_n$" означает, что существуют две положительные постоянные C_1 и C_2, такие, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $C_1 B_n \leqslant A_n \leqslant C_2 B_n$.

Определение 1. Положительная последовательность α называется *почти убывающей*, если существует постоянная $C = C(\alpha) > 1$, такая, что

$$\forall k, n \in \mathbf{N}, \quad k > n: \quad \alpha_k \leqslant C\alpha_n.$$

Класс почти убывающих последовательностей обозначается через ADS.

Определение 2. Положительная последовательность β называется *квазимонотонной*, если существует число $\tau > 0$, такое, что

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad \beta_{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{\tau}{n}\right) \beta_n.$$

Класс квазимонотонных последовательностей обозначается через QMS.

Определение 3. Положительная последовательность γ называется *локально почти убывающей*, если существует постоянная $C = C(\gamma) > 1$, такая, что неравенство $\gamma_k \leqslant C\gamma_n$ выполняется для любых $n \in \mathbf{N}$ и $k = n+1, \ldots, 2n$.

Класс таких последовательностей обозначается через $LADS$.

Пусть DS — это класс убывающих последовательностей. Очевидно, что $DS \subset ADS \subset LADS$, $DS \subset QMS \subset LADS$. В [3] изучались соотношения между этими и некоторыми другими классами последовательностей. В частности, было показано, что классы AMS и QMS несравнимы, что свидетельствует о том, что включения $ADS \subset LADS$ и $QMS \subset LADS$ являются строгими.

Легко видеть, что если потребовать, чтобы неравенство из определения 3 выполнялось для $k = n, \ldots, [An]$ и $n = 1, 2, \ldots$, то при разных $A > 1$ будут получаться совпадающие между собой классы последовательностей.

Теорема 1. *Пусть последовательность $|\mathbf{a}| \in l_p \cap ADS$ произвольна $(0 < p \leqslant \infty)$. Тогда существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого $m \in \mathbf{N}$ имеет место оценка*

$$E_m(\mathbf{a})_p \leqslant C\sigma_m(\mathbf{a})_p.$$

Теорема 2. *Пусть последовательность $|\mathbf{b}| \in l_p \cap QMS$ произвольна $(0 < p \leqslant \infty)$. Тогда*

1) *для любого $Q > 1$ существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого $m \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство*

$$E_{[Qm]}(\mathbf{b})_p \leqslant C\sigma_{m-1}(\mathbf{b})_p \quad (\sigma_0(\mathbf{b})_p = \|\mathbf{b}\|_p);$$

2) *существует положительная последовательность $\mathbf{d} \in l_p \cap QMS$, для которой*

$$\sup_{m\in\mathbf{N}} \frac{E_m(\mathbf{d})_p}{\sigma_m(\mathbf{d})_p} = \infty;$$

при этом можно указать такую последовательность номеров $(n(m))$, что

$$E_{[Qn(m)]}(\mathbf{d})_p \asymp \sigma_{n(m)-1}(\mathbf{d})_p.$$

Утверждения остаются в силе для класса $LADS$.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, $\{\psi_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ — норма в $\mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n$, $c_n = (f, \psi_n)$. В [4] дан критерий сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ в терминах m-членных приближений. В нашем случае критерий записывается через наилучшие приближения.

Теорема 3. *Если последовательность $(|c_n|) \in l_2 \cap LADS$, то для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n(f)_{\mathcal{H}}.$$

Доказательства утверждений. Предпошлем доказательству теоремы 1 следующее простое утверждение.

Лемма. *Пусть последовательность* $\mathbf{a} \in l_\infty$, $u_n = \min_{1\leqslant k\leqslant n} |a_k|$, $v_n = \max_{k\geqslant n} |a_k|$. *Тогда*

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad u_n \leqslant a_n^* \leqslant v_n.$$

Доказательство. Из определения неубывающей перестановки следует, что $u_1 = |a_1| \leqslant a_1^*$. Пусть $a_j^* = |a_{k(j)}|$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Согласно определению $a_{n+1}^* = \max_{l\neq k(1),\ldots,k(n)} |a_l|$. Среди номеров $\{l \in \mathbf{N}|\ l \neq k(1), \ldots, k(n)\}$ найдется номер, совпадающий с одним из номеров из $1, 2, \ldots, n+1$. Пусть это будет l_0. Тогда $a_{n+1}^* \geqslant |a_{l_0}| \geqslant \min_{1\leqslant l\leqslant n+1} |a_l| = u_{n+1}$.

Перейдем к доказательству второго неравенства. Имеем $v_1 = a_1^* = \max_{k\geqslant 1} |a_k|$. Если множество $\{k(1), \ldots, k(n)\}$ совпадает с множеством $\{1, \ldots, n\}$, то $a_{n+1}^* = \max_{l\neq 1,\ldots,n} = v_{n+1}$. В противном случае найдется число $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, такое, что $k(i_0) \geqslant n+1$. Тогда $v_{n+1} = \max_{l\neq 1,\ldots n} |a_k| \geqslant |a_{k(i_0)}| = a_{i_0}^* \geqslant a_{n+1}^*$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $0 < p < \infty$. Зафиксируем $n \in \mathbf{N}$. Поскольку $|\mathbf{a}| \in ADS$, то $|a_n| \leqslant C|a_k|$, $k = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $|a_n| \leqslant C \min_{l=1,\ldots,n} |a_l| = u_n$. Из этого неравенства и леммы имеем

$$E_m(\mathbf{a})_p \leqslant C \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k^p \right)^{1/p} \leqslant C \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k^{*p} \right)^{1/p} = C\sigma_m(\mathbf{a})_p.$$

Аналогичные рассуждения верны и при $p = \infty$.

Доказательство теоремы 2. В силу включения $QMS \subset LADS$ первое утверждение достаточно доказать для класса $LADS$. Зафиксируем $N \in \mathbf{N}$. Пусть $C > 1$ таково, что члены последовательности $\mathbf{a}$ удовлетворяют неравенству

$$|a_k| \leqslant C|a_n| \text{ для всех } n \text{ и } k = n, \ldots, 2^N n.$$

Тогда

$$|a_l| \geqslant \frac{1}{C}|a_n| \text{ для } l = \left[\frac{n}{2^N}\right] + 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Следовательно, имеется по крайней мере $n - [n/2^N] \geqslant [n - n/2^N]$ членов последовательности $\mathbf{a}$, удовлетворяющих неравенству (1). Тогда из определения невозрастающей перестановки следует, что

$$|a_n| \leqslant C a_{[n-n/2^N]}^*, \ n \geqslant 2. \tag{2}$$

Пусть $p = 1$ (для других p, таких, что $0 < p < \infty$, выкладки проводятся аналогично). Тогда из (2) вытекает оценка

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} |a_m| \leqslant C \sum_{m=k+1}^{\infty} a_{[m-m/2^N]}^*,$$

т.е. имеет место оценка

$$E_k(\mathbf{a})_1 \leqslant C \sum_{m=[k+1-(k+1)/2^N]}^{\infty} a_m^* = C\sigma_{[k+1-(k+1)/2^N]-1}(\mathbf{a})_1. \tag{3}$$

Пусть теперь $0 < q < 1$ и число $k \in \mathbf{N}$ произвольно. Если $0 < q \leqslant \dfrac{1}{2}$, то при $N = 2$ и $k \geqslant 5$ имеем $[qk] \leqslant [k/2] \leqslant [k + 1 - (k+1)/2^2] - 1$. Тогда в силу монотонности приближений и неравенства (3)

$$\sigma_{[qk]}(\mathbf{a})_1 \geqslant \sigma_{[k+1-(k+1)/2^2]-1}(\mathbf{a})_1 \geqslant \frac{1}{C} E_k(\mathbf{a})_1.$$

Если $\dfrac{1}{2} < q < 1$, то найдется число $N \in \mathbf{N}$, такое, что $q \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^N}$. В этом случае для $k \geqslant 2^{N+2}$ имеем $[qk] \leqslant [k - k/2^N] \leqslant [k + 1 - (k+1)/2^{N+2}] - 1$. Тогда

$$E_k(\mathbf{a})_1 \leqslant C\sigma_{[k+1-(k+1)/2^{N+2}]-1}(\mathbf{a})_1 \leqslant C\sigma_{[qk]}(\mathbf{a})_1.$$

Таким образом, для любого $0 < q < 1$ существует постоянная C, такая, что для всех $k \in \mathbf{N}$ справедлива оценка

$$E_k(\mathbf{a})_1 \leqslant C\sigma_{[qk]}(\mathbf{a})_1. \tag{4}$$

Положим в неравенстве (4) $k = [Qm]$, где $Q = \dfrac{1}{q}$, $m \in \mathbf{N}$. Поскольку $m-1 \leqslant [q[Qm]]$, то

$$E_{[Qm]}(\mathbf{a})_1 \leqslant C\sigma_{[q[Qm]]}(\mathbf{a})_1 \leqslant C\sigma_{m-1}(\mathbf{a})_1.$$

Для $p = \infty$ из (2) имеем

$$E_k(\mathbf{a})_\infty = \max_{m\geqslant k+1} |a_m| \leqslant C \max_{m\geqslant k+1} a^*_{[m-m/2^N]} = Ca^*_{[k+1-(k+1)/2^N]} = C\sigma_{[k+1-(k+1)/2^N]-1},$$

откуда, как и выше, следует справедливость первого утверждения.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 2. Введем последовательность номеров $(n(k))$, взяв по определению $n(k+1) = 2^k n(k)$, $n(1) = 1$. Тогда $n(k+1) - n(k) = (2^k - 1)n(k)$.

Положим

$$\gamma_1 = 2,\ \gamma_m = 1 + \sum_{l=n(m)+1}^{n(m+1)-1} \prod_{j=n(m)}^{l-1} \left(1 + \frac{\tau}{j}\right),$$

$$\mu_1 = 1,\ \mu_m = \frac{1}{\prod_{j=n(m)}^{n(m+1)-2}\left(1+\frac{\tau}{j}\right)},\ m \geqslant 2.$$

Из определения следует, что $\gamma_m \geqslant 2$. А так как $n(m+1) - n(m) \to \infty$ при $m \to \infty$, то $\gamma_m \to \infty$.

Также легко проверить, что

$$\prod_{j=n(m)}^{n(m+1)-2} \left(1 + \frac{\tau}{j}\right) \to \infty \text{ при } m \to \infty. \tag{5}$$

Далее, пусть

$$\alpha_m = \frac{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_m}{\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_m}.$$

Теперь определим последовательность $\mathbf{d}$ следующим образом (здесь под $1/\infty$ понимается 1):

$$d_{n(k)} = \alpha_k^{1/p},\ d_{n(k)+j} = \alpha_k^{1/p} \prod_{l=n(k)}^{n(k)+j-1} \left(1 + \frac{\tau}{l}\right)^{1/p},\ j = 1, \ldots, n(k+1) - n(k) - 1,\ k \in \mathbf{N}.$$

В силу определения последовательность (α_m) строго убывает к нулю. Кроме того,

$$d_{n(m+1)-1} < d_{n(m-1)} = \alpha_{m-1}. \tag{6}$$

В самом деле, неравенство (6) равносильно неравенству

$$\alpha_{m-1} > \alpha_{m-1} \frac{\mu_m}{\gamma_m} \prod_{j=n(m)}^{n(m+1)-2} \left(1 + \frac{1}{j}\right).$$

Сократив на α_{m-1}, получаем истинное неравенство $1 > \dfrac{1}{\gamma_m}$.

Очевидно, что при $p = 1, \infty$ последовательность $\mathbf{d} \in QMS$. Поскольку любая положительная степень квазимонотонной последовательности квазимонотонна, то $\mathbf{d} \in QMS$ для всех $0 < p < \infty$. Принадлежность к l_p будет следовать из выкладок ниже.

Пусть $p = 1$ (для $0 < p < \infty$, $p \neq 1$, рассуждения аналогичны). Покажем, что

$$\frac{E_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_1}{\sigma_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_1} \to \infty \text{ при } k \to \infty. \tag{7}$$

Имеем

$$\sigma_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_1 = \sum_{l=n(k+1)-1}^{\infty} d_l^* = d_{n(k+1)-1}^* + \sum_{l=n(k+1)}^{\infty} d_l^*.$$

В силу определения последовательности $\mathbf{d}$

$$\sum_{l=n(k+1)}^{\infty} d_l^* = \sum_{l=n(k+1)}^{\infty} d_l, \quad d_{n(k+1)-1}^* = d_{n(k)} = \alpha_k.$$

Далее,

$$\sum_{l=n(k+1)}^{\infty} d_l = \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{l=n(m)}^{n(m+1)-1} d_l =$$

$$= \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(\alpha_m + \alpha_m \sum_{l=n(m)+1}^{n(m+1)-1} \prod_{j=n(m)}^{l-1} \left(1 + \frac{\tau}{j}\right)\right) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \alpha_m \gamma_m.$$

Заметим, что

$$\alpha_{k+1}\gamma_{k+1} = \alpha_k \mu_{k+1}, \ \alpha_{k+1}\gamma_{k+1} = \alpha_k \gamma_k \frac{\mu_{k+1}}{\gamma_k} \leqslant \frac{1}{2}\alpha_k\gamma_k.$$

Поэтому

$$\sigma_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_1 \asymp \alpha_k + \alpha_{k+1}\gamma_{k+1} \asymp \alpha_k. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$E_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_1 = d_{n(k+1)-1} + \sum_{l=n(k+1)}^{\infty} d_l > d_{n(k+1)-1} = \alpha_k \prod_{j=n(k)}^{n(k+1)-2} \left(1 + \frac{\tau}{j}\right). \tag{9}$$

Из (8), (9) и (5) следует (7).

Если $p = \infty$, то

$$E_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_\infty = d_{n(k+1)-1} = \alpha_k \prod_{j=n(k)}^{n(k+1)-2} \left(1 + \frac{\tau}{j}\right), \text{ а } \sigma_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_\infty = d_{n(k)} = \alpha_k,$$

откуда следует стремление к ∞ отношения $E_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_\infty / \sigma_{n(k+1)-2}(\mathbf{d})_\infty$.

Теперь покажем, что для любого $Q > 1$

$$E_{[Qn(k)]}(\mathbf{d})_1 \asymp \sigma_{n(k)-1}(\mathbf{d})_1.$$

Имеем

$$\sigma_{n(k)-1}(\mathbf{d})_1 = \sum_{l=n(k)}^{\infty} d_l^* = \sum_{l=n(k)}^{\infty} d_l \asymp \alpha_k\gamma_k.$$

Так как $Q > 1$, то существует число $k_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, такое, что $2^{k_0} < Q \leqslant 2^{k_0+1}$. Тогда $2^{k_0}n(k) \leqslant \leqslant [Qn(k)] \leqslant 2^{k_0+1}n(k)$ и, стало быть,

$$E_{2^{k_0+1}n(k)}(\mathbf{d})_1 \leqslant E_{[Qn(k)]}(\mathbf{d})_1 \leqslant E_{2^{k_0}n(k)}(\mathbf{d})_1.$$

Далее, с одной стороны, $E_{2^{k_0}n(k)}(\mathbf{d})_1 \leqslant E_{n(k)-1}(\mathbf{d})_1 \leqslant C\alpha_k\gamma_k$.

С другой стороны, пусть $k \geqslant k_0 + 2$. Тогда $2^{k_0+1}n(k) + 1 < n(k+1)$ и

$$E_{2^{k_0+1}n(k)}(\mathbf{d})_1 = \sum_{l=2^{k_0+1}n(k)+1}^{\infty} d_l = \sum_{l=n(k)}^{\infty} d_l - \sum_{l=n(k)}^{2^{k_0+1}n(k)} d_l \geqslant \alpha_k\gamma_k - \sum_{l=n(k)}^{2^{k_0+1}n(k)} d_l. \tag{10}$$

Теперь оценим

$$\sum_{l=n(k)}^{2^{k_0+1}n(k)} d_l = \alpha_k \left(1 + \sum_{l=n(k)}^{2^{k_0+1}n(k)-1} \prod_{j=n(k)}^{l} \left(1+\frac{\tau}{j}\right)\right) = \alpha_k(1+S). \tag{11}$$

Для наибольшего слагаемого в S имеем

$$\prod_{j=n(k)}^{2^{k_0+1}n(k)-1} \left(1+\frac{\tau}{j}\right) \leqslant e^{(2^{k_0+1}-1)n(k)\ln(1+\tau/n(k))} \leqslant e^{(2^{k_0+1}-1)\tau}.$$

Следовательно,

$$S \leqslant e^{(2^{k_0+1}-1)\tau}(2^{k_0+1}-1)n(k). \tag{12}$$

Поскольку $n(k)/\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$, то из (10)–(12) следует, что существует постоянная $C > 0$, такая, что $E_{2^{k_0}n(k)}(\mathbf{d})_1 \geqslant C\alpha_k\gamma_k$. Значит, $E_{[Qn(k)]}(\mathbf{d})_1 \asymp \alpha_k\gamma_k$, т.е. $E_{[Qn(k)]}(\mathbf{d})_1 \asymp \sigma_{n(k)-1}(\mathbf{d})_1$.

Если $p = \infty$, то

$$\sigma_{n(k)-1}(\mathbf{d})_\infty = \max_{l\geqslant n(k)} d_l^* = \max_{l\geqslant n(k)} d_l = d_{n(k+1)-1},$$

а

$$E_{2^{k_0}n(k)}(\mathbf{d})_\infty = \max_{l>2^{k_0}n(k)} d_l = d_{n(k+1)-1} = \max_{l>2^{k_0+1}n(k)} d_l = E_{2^{k_0+1}n(k)}(\mathbf{d})_\infty.$$

Следовательно, $E_{[Qn(k)]}(\mathbf{d})_\infty = \sigma_{n(k)-1}(\mathbf{d})_\infty$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Из (4) вытекает, что для любого числа $n \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\sigma_n(f)_{\mathcal{H}} \leqslant E_n(f)_{\mathcal{H}} \leqslant C\sigma_{[(n+1)/2]-1}(f)_{\mathcal{H}}, \tag{13}$$

и достаточность сразу следует из критерия Стечкина [4].

Докажем необходимость. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty |c_n|$ в силу критерия Стечкина равносильна сходимости $\sum_{n=1}^\infty \sigma_n(f)_2/\sqrt{n}$. Тогда утверждение следует из (13) и неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{[(n+1)/2]-1}(f)_{\mathcal{H}}/\sqrt{n} \leqslant (1+1/\sqrt{2})\|f\|_{\mathcal{H}} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n(f)_{\mathcal{H}}/\sqrt{n}.$$

Замечания. Если оставаться в рамках классов положительных последовательностей α, описываемых через поведение отношений $\dfrac{\alpha_k}{\alpha_n}$, то можно рассмотреть более общие классы, задаваемые следующим образом. Пусть дана последовательность $\varphi = (\varphi(n))$, такая, что $1 < \varphi(n) \leqslant \varphi(n+1)$, $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Определение 4. Положительная последовательность α называется φ *локально почти убывающей*, если найдется постоянная $C = C(\alpha) \geqslant 1$, такая, что неравенство $\alpha_k \leqslant C\varphi(k)\alpha_n$ выполняется для всех $n \in \mathbf{N}$ и $k = n, \ldots, 2n$.

Класс таких последовательностей обозначается $\varphi LADS$.

Повторяя рассуждения из теоремы 2, получаем, что для последовательности $|\mathbf{a}| \in l_p \cap \varphi LADS$ имеет место неравенство

$$E_n(\mathbf{a})_{p,\omega} \leqslant C\sigma_{[(n+1)/2]-1}(\mathbf{a})_p,$$

где $\|\cdot\|_{p,\omega}$ — это весовая l_p (квази)норма с весовой последовательностью $(1/\varphi^p(k))$ при $0 < p < \infty$ и $(1/\varphi(k))$ при $p = \infty$.

Предположим, что последовательность φ удовлетворяет условию удвоения, т.е. существует постоянная C', такая, что $\varphi(2n) \leqslant C'\varphi(n)$ для всех $n \in \mathbf{N}$ (в качестве примера такой последовательности φ можно взять последовательность $\varphi(n) = n^r$, $r > 0$). Тогда, как легко проверяется, классы последовательностей, удовлетворяющие условию

$$\alpha_k \leqslant C\varphi(k)\alpha_n,\ k = n, \ldots, [An],\ n \in \mathbf{N},$$

с $A > 1$, совпадают при разных A (при этом $\varphi(k) \asymp \varphi(n)$ для $k = n, \ldots, [An]$, $n \in \mathbf{N}$).

Поэтому для последовательностей φ с условием удвоения и $|\mathbf{a}| \in \varphi LADS$ имеет место неравенство

$$\frac{|a_k|}{\varphi(k)} \leqslant C a^*_{[k-k/2^N]}, \tag{14}$$

из которого также следует оценка

$$|a_k| \leqslant C\varphi([k-k/2^N]) a^*_{[k-k/2^N]}. \tag{15}$$

Как и при доказательстве теоремы 2, из (14) и (15) выводятся неравенства (через $1/\omega$ обозначена последовательность, членами которой являются числа, обратные к членам последовательности ω):

$$E_m(\mathbf{a})_{p,\omega} \leqslant C\sigma_{[m+1-(m+1)/2^N]-1}(\mathbf{a})_p \text{ и } E_m(\mathbf{a})_p \leqslant C\sigma_{[m+1-(m+1)/2^N]-1}(\mathbf{a})_{p,1/\omega}.$$

Следовательно, для любого $Q > 1$ будут справедливы оценки

$$E_{[Qm]}(\mathbf{a})_{p,\omega} \leqslant C\sigma_{m-1}(\mathbf{a})_p \text{ и } E_{[Qm]}(\mathbf{a})_p \leqslant C\sigma_{m-1}(\mathbf{a})_{p,1/\omega}. \tag{16}$$

Покажем, что существует положительная последовательность $\mathbf{w} = (w_n) \in \varphi LADS \cap l_p$ (($\varphi(k)$) удовлетворяет условию удвоения), для которой $\sup_n E_n(\mathbf{w})_{p,\omega}/\sigma_n(\mathbf{w})_p = \infty$.

Положим

$$n(1) = 1,\ n(k+1) = 2^3 n(k),\ \beta_k = \frac{1}{\varphi(2n(k))\varphi(2^2 n(k))} \asymp \frac{1}{\varphi^2(n(k))},$$

$$\gamma_k = n^{1/p}(k)(1 + \varphi(2n(k)) + \varphi(2n(k))\varphi(2^2 n(k))) \asymp n^{1/p}(k)\varphi^2(n(k)),\ k \in \mathbf{N}$$

(здесь под $1/\infty$ понимается 1).

Пусть

$$\alpha_k = \frac{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_k}{\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_k}.$$

Теперь последовательность $\mathbf{w}$ определим следующим образом:

$$w_j = \alpha_k,\ n(k) \leqslant j \leqslant 2n(k) - 1,$$

$$w_j = \alpha_k \prod_{t=1}^{i} \varphi(2^t n(k)),\ 2^i n(k) \leqslant j \leqslant 2^{i+1} n(k) - 1,\ i = 1, 2,\ k \in \mathbf{N}.$$

Отметим, что

$$\frac{w_{n(k+2)-1}}{w_{n(k)}} = \frac{1}{\gamma_{k+1}} < 1,\ \alpha_{k+1}\gamma_{k+1} = \alpha_k\gamma_k\frac{\beta_{k+1}}{\gamma_k} < \frac{1}{3}\alpha_k\gamma_k$$

и последовательность $\mathbf{w} \in \varphi LADS$.

Далее, для $0 < p < \infty$, как и при доказательстве теоремы 2, имеем

$$E^p_{n(k+1)-2}(\mathbf{w})_{p,\omega} = \sum_{l=n(k+1)-1}^{\infty} \frac{w_l^p}{\varphi^p(l)} > \frac{w^p_{n(k+1)-1}}{\varphi^p(n(k+1)-1)} \asymp \alpha_k^p \varphi^p(n(k)),$$

а

$$\sigma^p_{n(k+1)-2}(\mathbf{w})_p = w^p_{n(k)} + \sum_{l=n(k+1)}^{\infty} w^{*p}_l = \alpha_k^p + \sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{l=n(m)}^{n(m+1)-1} w_l^p \asymp$$

$$\asymp \alpha_k^p + \sum_{m=k+1}^{\infty} \alpha_m^p \gamma_m^p \asymp \alpha_k^p + \alpha_{k+1}^p \gamma_{k+1}^p \asymp \alpha_k^p,$$

что влечет доказываемое утверждение.

Для $p = \infty$ рассуждения остаются в силе с очевидными упрощениями.

Нам неизвестно, являются ли оценки (16) точными.

Результаты работы были частично анонсированы в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I // Math. Ann. 1907. **63**, N 4. 433–476.
2. *DeVore R.* Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. **7**. 51–150.
3. *Leindler L.* On the relationships of seven numerical sequences // Acta math. Acad. sci. hung. 2007. **114**, N 3. 227–234.
4. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. **102**, № 1. 37–40.
5. *Kudryavtsev N.L.* On connections between the m-term and best approximations of some classes of sequences in the spaces l_p // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Тез. докл. 5-й Междунар. конф., посвященной 95-летию чл.-корр. РАН, акад. Европ. акад. наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018г. М.: Изд-во РУДН, 2018. 31–32.

Поступила в редакцию
19.04.2019