СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold B.C., Villasenor J.A.* The tallest man in the world // Statistical theory and applications. Papers in honor of H. A. David. N.Y.: Springer, 1996. 81–88.
2. *Pakes A.G.* Extreme order statistics on Galton–Watson trees // Metrika. 1998. **47**, N 1. 95–117.
3. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. М.: Матем. ин-т РАН, 2008.
4. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
5. *Mitov K.V., Yanev G.P.* Maximum individual score in critical two-type branching processes // C. r. Acad. Bulg. Sci. 2002. **55**, N 11. 7–22.
6. *Lebedev A.V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time // Extremes. 2008. **11**, N 2. 203–216.
7. *Лебедев А.В.* Неклассические задачи стохастической теории экстремумов: Докт. дис. М., 2016.
8. *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с максимум-линейной наследственностью // Матем. заметки. 2019. **105**, № 3. 395–405.
9. *Nelsen R.* An Introduction to Copulas. N.Y.: Springer, 2006.

Поступила в редакцию
15.03.2019

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

К. А. Мирзоев[1], Н. Н. Конечная[2]

В работе получены асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для фундаментальной системы решений уравнения

$$l(y) := i^{2n+1}\{(qy^{(n+1)})^{(n)} + (qy^{(n)})^{(n+1)}\} + py = \lambda y, \qquad x \in I := [1, +\infty),$$

где λ — комплексный параметр. Предполагается, что q — положительная, непрерывно дифференцируемая функция, p имеет вид $p = \sigma^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где σ — локально интегрируемая на I функция, а производная понимается в смысле теории распределений. Эти формулы в случае, когда $k = 0$ и $\lambda \neq 0$, коэффициенты q и p выражения $l(y)$ таковы, что $q = 1/2 + q_1$, а $q_1, \sigma (= p)$ интегрируемы на I, хорошо известны. Установлено, что они справедливы при этих же ограничениях на q_1 и σ для любого $1 \leqslant k \leqslant n-1$. При $k = n$ на эти функции налагаются дополнительные органичения. Отдельно рассматривается случай, когда $\lambda = 0$.

Получены также асимптотические формулы для решений уравнения $l(y) = \lambda y$ при условии, когда $q(x) = \alpha x^{2n+1+\nu}(1 + r(x))^{-2}$, $\sigma(x) = x^{k+\nu}(\beta + s(x))$, где $\alpha \neq 0$ и β — комплексные числа, $\nu \geqslant 0$, а функции r и s удовлетворяют некоторым условиям интегрального убывания.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с коэффициентами-распределениями, квазипроизводные, асимптотика решений дифференциальных уравнений.

Asymptotic formulas are obtained in the paper for $x \to +\infty$ for the fundamental system of solutions to the equation

$$l(y) := i^{2n+1}\{(qy^{(n+1)})^{(n)} + (qy^{(n)})^{(n+1)}\} + py = \lambda y, \qquad x \in I := [1, +\infty),$$

[1] *Мирзоев Карахан Агахан оглы* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru.

[2] *Конечная Наталья Николаевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа, алгебры и геометрии САФУ, e-mail: n.konechnaya@narfu.ru.

Mirzoev Karakhan Agakhan ogly — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

Konechnaya Natal'ya Nikolaevna —Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Northern (Arctic) Federal University, Chair of Mathematical Analysis, Algebra, and Geometry.

where λ is a complex parameter. It is assumed that q is a positive continuously differentiable function, p has the form $p = \sigma^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, where σ is a locally integrable on I function, and the derivative is understood in the sense of the theory of distributions. In the case when $k = 0$ and $\lambda \neq 0$, and the coefficients q and p of the expression $l(y)$ are such that $q = 1/2 + q_1$, and $q_1, \sigma(= p)$ are integrable on I, these formulas are well known. It was established in the paper that they are valid under the same restrictions on q_1 and σ and for any $1 \leqslant k \leqslant n-1$. For $k = n$ additional constraints arise on these functions. We consider separately the case when $\lambda = 0$.

Asymptotic formulas were also obtained for solutions to the equation $l(y) = \lambda y$ under the condition $q(x) = \alpha x^{2n+1+\nu}(1+r(x))^{-2}$, $\sigma(x) = x^{k+\nu}(\beta + s(x))$, where $\alpha \neq 0$ and β are complex numbers, $\nu \geqslant 0$, and the functions r and s satisfy certain conditions of integral decay.

Key words: differential equations with distribution coefficients, quasi-derivatives, asymptotics of solutions of differential equations.

В настоящей работе изучается главный член асимпотики при $x \to +\infty$ фундаментальной системы решений "двучленного" дифференциального уравнения нечетного порядка

$$l(y) := i^{2n+1}\{(qy^{(n+1)})^{(n)} + (qy^{(n)})^{(n+1)}\} + py = \lambda y, \qquad x \in I := [1, +\infty), \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр. Предполагается, что вещественнозначная функция q такова, что

$$q \in AC_{\mathrm{loc}}(I) \qquad \text{и} \qquad q(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in I, \tag{2}$$

p — обобщенная функция, представимая в виде $p = \sigma^{(k)}$, где производная k-го порядка, $0 \leqslant k \leqslant n$, понимается в смысле теории распределений, а σ — комплекснозначная функция, такая, что

$$\sigma \in L^1_{\mathrm{loc}}(I). \tag{3}$$

Здесь, как обычно, $AC_{\mathrm{loc}}(I)$ — пространство абсолютно непрерывных на каждом компакте $[\alpha, \beta] \subset I$ функций, а $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ — пространство локально интегрируемых на I функций.

Отметим, что если функция σ, как и функция q, является вещественнозначной и обе они гладкие (достаточно, чтобы $q \in C^{n+1}(I)$, $\sigma \in C^k(I)$), то выражение $l(y)$ является симметрическим дифференциальным выражением в классическом смысле.

При выполнении условий (2) и (3) определим решение уравнения (1) как решение некоторого квазидифференциального уравнения, построенного по следующей процедуре.

Пусть F^k_{2n+1} — квадратная матрица размерности $2n+1$ с элементами $f^k_{ij}(=: f_{ij})$, такими, что

(i) при любом k

$$f_{j,j+1} := 1,\ j = 1, 2, \ldots, n-1, n+2, \ldots, 2n, \qquad f_{n,n+1} = f_{n+1,n+2} := \frac{1}{\sqrt{2q}};$$

(ii) при $k < n$

$$f_{2n+j-k,j} := (-1)^{n+j-1} C_k^{j-1} i\sigma, \quad j = 1, 2, \ldots, k+1;$$

при $k = n$

$$f_{n+1,1} := (-1)^n \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}}, \qquad f_{n+j,j} := (-1)^{n+j-1} C_n^{j-1} i\sigma, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \qquad f_{2n+1,n+1} := \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}},$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты. Все неуказанные элементы матрицы F^k_{2n+1} равны нулю.

Таким образом, матрица F^k_{2n+1} при $k < n$ и при $k = n$ имеет вид

$$F^k_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \ddots \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2q}} & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{2q}} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & D_k & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F^n_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \ddots \\ & & & 1 & 0 & & & \\ \vdots & & & & \frac{1}{\sqrt{2q}} & & & \\ \frac{(-1)^n i\sigma}{\sqrt{2q}} & & & & & \frac{1}{\sqrt{2q}} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & D_n & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}} & & & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Здесь элемент $\frac{1}{\sqrt{2q}}$ находится на пересечении n-й строки и $(n+1)$-го столбца, а также на пересечении $(n+1)$-й строки и $(n+2)$-го столбца; при $k < n$ диагональная матрица $D_k := \operatorname{diag}(f_{2n+1-k,1}, f_{2n+2-k,2}, \ldots, f_{2n+1,k+1})$ размерности $k+1$ (см. равенство (ii) при $k < n$) занимает левый нижний блок матрицы F^k_{2n+1}; при $k = n$ диагональная матрица $D_n := \operatorname{diag}(f_{n+2,2}, f_{n+3,3}, \ldots, f_{2n,n})$ размерности $n-1$ (см. равенства (ii) при $k = n$) заполняет блок (f_{ij}) с номерами строк $i = n+2, n+3, \ldots, 2n$ и столбцов $j = 2, 3, \ldots, n$ матрицы F^n_{2n+1}.

В частности, эти матрицы при $n = 1$ имеют вид

$$F^0_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} \\ -i\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^1_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2q_0}} & 0 \\ -\frac{i\sigma}{\sqrt{2q}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} \\ 0 & \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}} & 0 \end{pmatrix},$$

а при $n = 2$ — вид

$$F^0_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^1_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 \\ i\sigma & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i\sigma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 & 0 \\ \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2q}} & 0 \\ 0 & -2i\sigma & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя общепринятой процедуре (см., например, книгу [1, разд. I, с. 8]), определим квазипроизводные $y^{[j]}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$, заданной функции y посредством матрицы F^k_{2n+1}. Эти квазипроизводные при $j = 0, 1, \ldots, n$ и при любом k определим равенствами

$$y^{[j]} := y^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad y^{[n]} := \sqrt{2q}y^{(n)};$$

квазипроизводную $y^{[n+1]}$ — равенством

$$y^{[n+1]} := \begin{cases} \sqrt{2q}(\sqrt{2q}y^{(n)})', & \text{если} \ \ k < n; \\ \sqrt{2q}(\sqrt{2q}y^{(n)})' - (-1)^n i\sigma y, & \text{если} \ \ k = n. \end{cases}$$

Далее, определим квазипроизводные $y^{[n+1+j]}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, положив при $k < n-1$

$$y^{[n+1+j]} := \begin{cases} (y^{[n+1]})^{(j)}, & j = 1, 2, \ldots, n-k-1; \\ (y^{[n+j]})' - (-1)^{j+k} C_k^{j+k-n} i\sigma y^{[j+k-n]}, & j = n-k, \ldots, n-1, \end{cases}$$

а при $k = n-1$ и $k = n$

$$y^{[n+1+j]} := (y^{[n+j]})' - (-1)^{j+k} C_k^{j+k-n} i\sigma y^{[j+k-n]}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Определим теперь квазидифференциальное выражение $\tau(y)$ посредством матрицы F^k_{2n+1}, полагая при $k < n$

$$\tau y := (y^{[2n]})' - (-1)^{n+k} i\sigma y^{[k]},$$

а при $k = n$

$$\tau(y) := (y^{[2n]})' - \frac{i\sigma}{\sqrt{2q}} y^{[n]}.$$

Естественная область определения $\mathcal{D}$ выражения $\tau(y)$ — это множество всех комплекснозначных функций y, таких, что $y^{[j]} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$. Отметим, что если $y \in \mathcal{D}$, то $\tau(y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $y \in \mathcal{D}$. Тогда распределение $l(y)$ является обобщенной функцией типа функции (регулярной обобщенной функцией) и для него справедливо равенство*

$$l(y) = i^{2n+1}\tau(y).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l(y) = \lambda y + f. \tag{4}$$

Предположив, что функция $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, и применив лемму 1, уравнение (4) запишем в следующем виде:

$$i^{2n+1}\tau(y) = \lambda y + f.$$

Это уравнение согласно построению матрицы F^k_{2n+1} равносильно системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{y}' = (F^k_{2n+1} + \Lambda)\mathbf{y} + \mathbf{f}, \tag{5}$$

где $\mathbf{y} := (y^{[0]}, y^{[1]}, \dots, y^{[2n]})^T$, $\mathbf{f} := i^{-2n-1}(0, 0, \dots, f)^T$ (здесь T — символ транспонирования), а Λ — числовая матрица размерности $2n+1$ с элементами λ_{ij}, такими, что все элементы равны нулю, кроме элемента $\lambda_{2n+1,1} := i^{-2n-1}\lambda$.

Из условий (2) и (3) следует, что все элементы матрицы F^k_{2n+1} принадлежат пространству $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Поэтому задача Коши для системы уравнений (5), поставленная в произвольной точке полуоси I, имеет единственное решение и все компоненты этого решения принадлежат пространству $AC_{\mathrm{loc}}(I)$.

Уравнение (4) и система уравнений (5) равносильны в том смысле, что если $\mathbf{y}$ является решением системы (5), то его первая координата $y(= y^{[0]})$ удовлетворяет уравнению (4) почти всюду, и наоборот, если все квазипроизводные функции y до $2n$-го порядка принадлежат классу $AC_{\mathrm{loc}}(I)$ и y удовлетворяет уравнению (4) почти всюду, то $\mathbf{y}$ является решением системы (5). Таким образом, условия (2) и (3) обеспечивают справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (4), поставленной в произвольной точке полуоси I.

Известно (см. [1, разд. 1, с. 10, формулы (2.13) и (2.17)]), что в случае, когда функция σ, как и q, является вещественнозначной, квазидифференциальное выражение $i^{2n+1}\tau(y)$ является симметрическим (формально самосопряженным) выражением. Таким образом, при выполнении условий (2) и (3) выражение $l(y)$ (см. (1)) является симметрическим двучленным дифференциальным выражением нечетного порядка с коэффициентами — обобщенными функциями.

Сформулируем теперь основные результаты. Всюду далее через $o(1)$ обозначается функция, являющаяся бесконечно малой при $x \to +\infty$.

Теорема 1. *Пусть вещественнозначная функция q удовлетворяет условию (2) и допускает представление $q = (1+r)^{-2}/2$, а p — комплекснозначная обобщенная функция, представимая в виде $p = \sigma^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где функция σ удовлетворяет условию (3). Пусть при этом $r \in L^1(I)$ и*

$$\sigma \in L^1(I), \quad \text{если } k < n, \qquad \text{и} \qquad \sigma(1+|r|) \in L^1(I), \quad \text{если } k = n. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) при $\lambda \neq 0$ имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$ вида

$$y_j^{[s-1]}(x) = e^{z_j x} z_j^{s-1}(1 + o(1)), \quad s = 1, 2, \dots, 2n+1, \tag{7}$$

где z_j — различные корни степени $2n+1$ из $(-1)^{n-1} i\lambda$.

Отметим, что в случае $k = 0$ утверждение теоремы 1 справедливо для уравнений более общего вида (см., например, [2, гл. 1, п. 9.1, теорема 1.9.1, с. 37; с. 40 и комментарии к п. 9.1 гл. 1, с. 53]).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 с заменой условий (6) условиями*

$$x^{2n-k}\sigma \in L^1(I), \quad \text{если } k < n, \quad \text{и} \quad x^n\sigma(1+|r|) \in L^1(I), \quad \text{если } k = n.$$

Тогда при $\lambda = 0$ уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$ вида

$$y_j^{[s]}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{j-1-s}}{(j-1-s)!}(1 + o(1)), & \text{если } s = 0, 1, \dots, j-1; \\ x^{j-1-s}\, o(1), & \text{если } s = j, j+1, \dots, 2n. \end{cases} \tag{8}$$

В случае $k = 0$ утверждение теоремы 2 также хорошо известно и представляет собой частный случай одного классического результата (см., например, [2, гл. 1, теорема 1.10.2, с. 45; 3, гл. X, § 17, теорема 17.1, с. 373]).

Отметим, что при $k \geqslant 1$ результаты теорем 1 и 2 являются новыми, в частности утверждается, что классические асимптотические формулы (см. (7) и (8) при $s = 0$) для фундаментальной системы решений уравнения (1) справедливы и в некоторых случаях, когда коэффициент $q \equiv 1$, а p является гладкой и сильно осциллирующей функцией. Такие примеры легко построить. В частности, функция $p = \sigma^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, где

$$\sigma(x) = \frac{\sin x^\alpha}{1 + x^{2n+1}}, \quad \alpha > 2n + 2,$$

является такой.

В условиях теорем 1 и 2 функции q и σ являются в известном смысле возмущениями постоянных функций (1/2 и 0 соответственно). Теперь сформулируем теорему, когда функции q и σ имеют степенной рост на бесконечности.

Теорема 3. *Пусть число $\nu \geqslant 0$ и целое число k, $0 \leqslant k \leqslant n$, таковы, что функции q и p допускают представления*

$$q(x) = \frac{\alpha x^{2n+1+\nu}}{(1 + r(x))^2}, \quad p(x) = \sigma^{(k)}(x),$$

где

$$\sigma(x) = x^{k+\nu}(\beta + s(x)),$$

$\alpha \neq 0$ и β — комплексные числа, а r и s — комплекснозначные функции. Пусть, далее, функции r и s таковы, что

$$\frac{(\ln x)^{m-1}}{x}(|r(x)| + |s(x)|) \in L^1(I), \quad \text{если } k < n,$$

и

$$\frac{(\ln x)^{m-1}}{x}\,(|r(x)| + |s(x)| + |r(x)\,s(x)|) \in L^1(I), \quad \text{если } k = n,$$

где m — наибольшее из чисел, равных кратностям корней многочлена от переменной z

$$\mathcal{F}_{2n+1}(z,\nu,k) = (-1)^n \beta \prod_{j=1}^{k}(j+\nu) + 2i\alpha\Big(z + \frac{\nu}{2}\Big)\prod_{j=0}^{n-1}\Big[\Big(z+\frac{\nu}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\nu+1}{2} + j\Big)^2\Big] - \lambda(\nu),$$

$$\lambda(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu > 0; \\ i^{-2n}\lambda, & \text{если } \nu = 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$, такую, что если z_1 — корень многочлена $\mathcal{F}_{2n+1}(z,\nu,k)$ кратности $l_1 \leqslant m$, то ему соответствует подсистема решений $\{y_j\}_{j=1}^{l_1}$ вида

$$y_j^{[s-1]}(x) = x^{z_1 - s + 1/2}\,(\ln x)^{j-1}\,(c_s + o(1)), \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_j^{[n]}(x) = x^{z_1 + \nu/2}\,(\ln x)^{j-1}\,(c_{n+1} + o(1)),$$

$$y_j^{[n+s]}(x) = x^{z_1 + n + \nu - s + 1/2}\,(\ln x)^{j-1}\,(c_{n+s+1} + o(1)), \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

где c_s — некоторые комплексные числа и $c_1 \neq 0$. Такую же асимптотику имеет и другая подсистема решений $\{y_j\}$, $j = l_1 + 1, \ldots, l_1 + l_2$, отвечающая корню z_2 многочлена $\mathcal{F}_{2n+1}(z,\nu,k)$ кратности l_2, и т.д.

Как и утверждения теорем 1 и 2, утверждение теоремы 3 также справедливо для некоторых сильно осциллирующих функций $p(x)$. Это, очевидно, можно обеспечить подходящим подбором функций $r(x)$ и $s(x)$.

Отметим, что многочлен $\mathcal{F}_{2n+1}(z,\nu,k)$ является характеристическим многочленом некоторой постоянной матрицы размерности $2n+1$. Структура этой матрицы такова, что геометрическая кратность любого собственного значения этой матрицы равна 1. Числа c_s из формулировки теоремы 3 — это компоненты собственного вектора, соответствующего собственному значению z_1 этой матрицы, при этом $c_1 \neq 0$.

Теорема 3 при $k = 0$ является частным случаем одной теоремы из работы [4] (см. также [5, теорема 5]). Работы [4, 5] содержат и сведения о возникновении многочлена, аналогичного $\mathcal{F}_{2n+1}(z, \nu, k)$, для симметрических дифференциальных уравнений с аналитическими на бесконечности коэффициентами и о его роли в вопросах асимптотического поведения решений этих уравнений на бесконечности.

В работе [6] сформулированы аналоги теорем 1–3 для дифференциальных уравнений

$$(-1)^n (p(x) y^{(n)})^{(n)} + q(x) y = \lambda y,$$

где функция p такова, что $p, 1/p \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, а q — обобщенная функция, представимая в виде $q = \sigma^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, причем

$$\sigma \in L^1_{\mathrm{loc}}(I), \quad \text{если } k < n, \qquad \text{и} \qquad \frac{\sigma^2}{p} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I), \quad \text{если } k = n.$$

Там же приведены доказательства соответствующих теорем для случая $n = 1$.

Результаты, представленные в теоремах 1 и 2, получены при поддержке РНФ, грант № 17–11–01215; результаты, представленные в теореме 3, получены при поддержке РФФИ, грант № 18–01–00250.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Everitt W.N., Marcus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // AMS. Mathematical Surveys and Monographs. 1999. Vol. 61
2. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
4. *Мирзоев К.А.* О теореме Орлова об индексе дефекта дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2001. **380**, № 5. 591–595.
5. *Мирзоев К.А., Долгих И.Н.* Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов // Матем. сб. 2006. **197**, № 4. 53–74.
6. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. 2018. **104**, № 2. 231–242.

Поступила в редакцию
12.04.2019

УДК 517.518.2

О СВЯЗИ m-ЧЛЕННЫХ И НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ l_p

Н. Л. Кудрявцев[1]

В пространствах l_p получены соотношения между m-членными и наилучшими приближениями последовательностей, удовлетворяющих условиям типа монотонности.

Ключевые слова: m-членное приближение, почти убывающая последовательность, квазимонотонная последовательность, локально почти убывающая последовательность,

[1] *Кудрявцев Николай Львович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: nilkud@mech.math.msu.su.

Kudryavtsev Nickolai Lvovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Mathematical Analysis.