СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Оценки смешанных модулей гладкости в метриках L_q через смешанные модули гладкости в метрике L_1 // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 2. 12–26.
2. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Связь между смешанными модулями гладкости в метриках L_p и L_∞ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 3. 21–35.
3. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Связь между полными модулями гладкости в метриках L_1 и L_∞ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 16–24.
4. *Potapov M.K., Simonov B.V.* Analogues of Ulyanov inequalities for mixed moduli of smoothness // Methods of Fourier analysis and approximation theory. Applied and numerical harmonic analysis. Basel: Birkhäuser-Verlag, Switzerland, 2016. 161–179.
5. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
7. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Свойства частного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики. Тр. мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова. Т. X. Математика. Вып. 1. К 60-летию семинара “Тригонометрические и ортогональные ряды”. М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова, 2014. 58–71.
8. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Дробные модули гладкости: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2016.
9. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Изв. вузов. Математика. 2019. № 1. 1–14.
10. *Унинский А.П.* Неравенства в смешанной метрике для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени // Мат-лы Всесоюз. симп. по теоремам вложения. Баку, 1966. 212–213.
11. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Изд-во физ-мат. литературы, 1961.

Поступила в редакцию
09.01.2019

УДК 519.21

НОВЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ МАКСИМУМОВ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. В. Карпенко[1]

Изучаются двумерные максимумы признаков частиц в бессмертных ветвящихся процессах с непрерывным временем. Найдено предельное распределение для максимумов двух признаков в два момента времени. Получены предельные интенсивности скачков максимумов вверх и вниз совместно для обоих признаков или хотя бы для одного признака. В случае независимых признаков вычислены средние числа совместных скачков максимумов вверх и вниз за все время. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: многомерные распределения, экстремумы, копулы, ветвящиеся процессы.

Bivariate maxima of particle scores in immortal branching processes with continuous time are studied. The limit distribution for a maximum of two scores at two points in time is found. The limit intensities of the up and down jumps of the maximum for both scores or at least one score are obtained. In the case of independent scores, mean total numbers of joint maxima jumps up and down are calculated. Results are illustrated by examples.

Key words: multivariate distributions, extreme values, copulas, branching processes.

1. Введение. Интересным направлением междисциплинарных исследований на стыке теории экстремумов и теории ветвящихся процессов является изучение максимумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах (по поколениям или за все время). Отметим фундаментальные в этой

[1] *Карпенко Анна Валерьевна* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: karpenki9@yandex.ru.

Karpenko Anna Valer'evna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

области работы Б. Арнольда и Дж. Вилласенора [1] и А. Пейкса [2]. А именно рассматривались классические процессы Гальтона–Ватсона [3, 4], в которых каждая частица обладает некоторым случайным признаком, и изучалось поведение максимумов признаков по поколениям или за все время. В работе К.В. Митова и Дж.П. Янева [5] исследовались максимумы в процессах с двумя типами частиц.

В работе А.В. Лебедева [6] рассматривались максимумы одного или двух признаков частиц в бессмертных марковских ветвящихся процессах с непрерывным временем (Беллмана–Харриса); найдены предельные распределения максимума одного или двух признаков в один момент времени, а также одного признака в два момента времени, предельные интенсивности скачков вверх и вниз максимумов одного признака. В настоящей работе развиваются идеи этой статьи.

Отметим также, что наиболее полно результаты А.В. Лебедева, касающиеся максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах, представлены в его докторской диссертации [7, гл. 2], а в работе [8] можно найти более подробный обзор литературы и приложений.

2. Основные предположения и обозначения. Следуя [4, гл. 5], рассмотрим марковский ветвящийся процесс $Z(t)$ с непрерывным временем: пусть процесс начинается с одной частицы, продолжительность жизни частицы имеет показательное распределение с параметром λ и после себя она оставляет случайное число потомков с производящей функцией $h(s)$, $s \in (0,1)$. Предполагаем, что число непосредственных потомков не менее одного (таким образом, процесс является бессмертным), а его среднее $\mu > 1$ и дисперсия конечны. При сделанных предположениях

$$h(0) = 0, \quad h(s) < s, \quad s \in (0,1), \quad h'(0) = p_1 < 1, \quad 1 < h'(1) = \mu < \infty.$$

Как известно, для надкритических процессов имеет место предел п.н.

$$Z(t)e^{-\kappa t} \to W,\ t \to \infty,\ \kappa = \lambda(\mu - 1) \tag{1}$$

с преобразованием Лапласа $\varphi(t) = \mathbf{E}e^{-tW}$, которое определяется обратной функцией

$$\varphi^{-1}(s) = (1-s)\exp\left\{\int\limits_1^s \Big(\frac{\mu - 1}{h(u) - u} + \frac{1}{1-u}\Big)du\right\},\ s \in (0,1).$$

В нашем случае бессмертного процесса $W > 0$ п.н. Известно также, что производящая функция $f(s,t)$ числа частиц $Z(t)$ в момент времени $t \geqslant 0$ является единственным решением уравнения

$$\int\limits_s^{f(s,t)} \frac{du}{h(u) - u} = \lambda t.$$

Пример 1. Пусть $h(s) = s^2$ (у каждой частицы ровно два непосредственных потомка), тогда W имеет стандартное показательное распределение, а $Z(t)$ — геометрическое распределение с параметрами $p = e^{-\lambda t}$ и $q = 1 - e^{-\lambda t}$.

Пусть каждая частица обладает двумя случайными признаками, постоянными в течение всей жизни, причем признаки разных частиц независимы, а признаки одной частицы могут быть зависимы между собой и имеют совместное распределение $F(x,y)$. Обозначим через $(M_x(t), M_y(t))$ двумерные максимумы признаков в популяции в момент $t \geqslant 0$.

Предположим, что $F(x,y)$ принадлежит области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона, т.е. существуют такие функции $\alpha(r) > 0$, $\beta(r)$, $r > 0$, и невырожденное распределение G, что

$$F^r(\alpha_1(r)x + \beta_1(r), \alpha_2(r)y + \beta_2(r)) \to G(x,y), \qquad r \to \infty. \tag{2}$$

Обозначим копулу распределения F через C и копулу G через D. Тогда верно

$$D(u,v) = \lim_{n\to\infty} C^n(u^{1/n}, v^{1/n}). \tag{3}$$

Будем использовать представления $F(x,y) = C(F_x(x), F_y(y))$ и $G(x,y) = D(G_x(x), G_y(y))$, где $F_x(x)$, $F_y(y)$ и $G_x(x)$, $G_y(y)$ — частные распределения F и G соответственно.

3. Предельное распределение максимумов. Найдем предельное распределение максимумов двух признаков частиц в два момента времени.

Теорема 1. *Пусть* $u_x(t,x)=\alpha_1(e^{\kappa t})x+\beta_1(e^{\kappa t})$, $u_y(t,y)=\alpha_2(e^{\kappa t})y+\beta_2(e^{\kappa t})$, *тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(M_x(t)\leqslant u_x(t,x),M_y(t)\leqslant u_y(t,y),M_x(t+s)\leqslant u_x(t+s,x),M_y(t+s)\leqslant u_y(t+s,y))=$$

$$=\mathbf{E}\varphi\Big(-\ln\Big(D\big(G_x^{r_1}(x_1)\wedge G_x^{r_2}(x_2),G_y^{r_1}(y_1)\wedge G_y^{r_2}(y_2)\big)D^{1-r_1}\big(G_x(x_1),G_y(y_1)\big)D^{1-r_2}\big(G_x(x_2),G_y(y_2)\big)\Big)\Big),$$

где $r_1=e^{-\lambda s}$, $r_2=e^{-\lambda\mu s}=r_1^{\mu}$.

Доказательство. Заметим, что популяции частиц в указанные моменты времени имеют общую часть: это частицы, существовавшие в момент t и дожившие до момента $t+s$. Обозначим их число через $Z_s(t)$ и отметим, что $Z_s(t)\sim e^{-\lambda s}Z(t)\sim e^{-\lambda\mu s}Z(t+s)$ при $t\to\infty$. Число частиц, существовавших в момент t и не доживших до $t+s$, составляет $Z(t)-Z_s(t)\sim(1-e^{-\lambda s})Z(t)$, а число частиц, родившихся после момента t и доживших до $t+s$, равно $Z(t+s)-Z_s(t)\sim(e^{\kappa s}-e^{-\lambda s})Z(t)\sim(1-e^{-\lambda\mu s})Z(t+s)$. Получаем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(M_x(t)\leqslant u_x(t,x_1),M_y(t)\leqslant u_y(t,y_1),M_x(t+s)\leqslant u_x(t+s,x_2),M_y(t+s)\leqslant u_y(t+s,y_2))=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}F^{Z_s(t)}(u_x(t,x_1)\wedge u_x(t+s,x_2),u_y(t,y_1)\wedge u_y(t+s,y_2))F^{Z(t)-Z_s(t)}(u_x(t,x_1),u_y(t,y_1))\times$$

$$\times F^{Z(t+s)-Z_s(t)}(u_x(t+s,x_2),u_y(t+s,y_2))=\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}F^{e^{-\lambda s}Z(t)}(u_x(t,x_1)\wedge u_x(t+s,x_2),u_y(t,y_1)\wedge u_y(t+s,y_2))\times$$

$$\times F^{(1-e^{-\lambda s})Z(t)}(u_x(t,x_1),u_y(t,y_1))F^{(1-e^{-\lambda\mu s})Z(t+s)}(u_x(t+s,x_2),u_y(t+s,y_2)).$$

Используя представление $F(x,y)=C(F_x(x),F_y(y))$, а также формулы (1)–(3), имеем

$$\lim_{t\to\infty}F^{(1-e^{-\lambda s})Z(t)}(u_x(t,x_1),u_y(t,y_1))=\lim_{t\to\infty}C^{e^{\kappa t}\cdot(1-e^{-\lambda s})(Z(t)e^{-\kappa t})}(F_x(u_x(t,x_1)),F_y(u_y(t,y_1)))=$$

$$=\lim_{t\to\infty}D^{(1-r_1)W}(F_x^{e^{\kappa t}}(u_x(t,x_1)),F_y^{e^{\kappa t}}(u_y(t,y_1)))=D^{(1-r_1)W}(G_x(x_1),G_y(y_1)).$$

Аналогичным образом получаем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}F^{e^{-\lambda s+\kappa t}\cdot Z(t)e^{-\kappa t}}(u_x(t,x_1)\wedge u_x(t+s,x_2),u_y(t,y_1)\wedge u_y(t+s,y_2))=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}D^{W}(F_x^{e^{-\lambda s+\kappa t}}(u_x(t,x_1))\wedge F_x^{e^{-\lambda\mu s+\kappa(t+s)}}(u_x(t+s,x_2)),$$

$$F_y^{e^{-\lambda s+\kappa t}}(u_y(t,y_1))\wedge F_y^{e^{-\lambda\mu s+\kappa(t+s)}}(u_y(t+s,y_2)))=\mathbf{E}D^{W}(G_x^{r_1}(x_1)\wedge G_x^{r_2}(x_2),G_y^{r_1}(y_1)\wedge G_y^{r_2}(y_2))$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}F^{(1-e^{-\lambda s})Z(t)}(u_x(t,x_1),u_y(t,y_1))=\mathbf{E}D^{(1-r_2)W}(G_x(x_2),G_y(y_2)).$$

Из формулы $\varphi(\tau)=\mathbf{E}e^{-\tau W}$ имеем $\mathbf{E}u^{W}=\varphi(-\ln u)$, $u>0$. Таким образом приходим к цепочке равенств

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(M_x(t)\leqslant u_x(t,x),M_y(t)\leqslant u_y(t,y),M_x(t+s)\leqslant u_x(t+s,x),M_y(t+s)\leqslant u_y(t+s,y))=$$

$$=\mathbf{E}D\big(G_x^{r_1}(x_1)\wedge G_x^{r_2}(x_2),G_y^{r_1}(y_1)\wedge G_y^{r_2}(y_2)\big)D^{1-r_1}\big(G_x(x_1),G_y(y_1)\big)D^{1-r_2}\big(G_x(x_2),G_y(y_2)\big)^{W}=$$

$$=\varphi\Big(-\ln\Big(D\big(G_x^{r_1}(x_1)\wedge G_x^{r_2}(x_2),G_y^{r_1}(y_1)\wedge G_y^{r_2}(y_2)\big)D^{1-r_1}\big(G_x(x_1),G_y(y_1)\big)D^{1-r_2}\big(G_x(x_2),G_y(y_2)\big)\Big)\Big).$$

□

Пример 2. Пусть $G_x(x)$, $G_y(y)$ — стандартные функции распределения Гумбеля и W имеет стандартное показательное распределение, тогда $\varphi(\tau)=(1+\tau)^{-1}$.

Для копулы независимости $D(u,v)=uv$ получаем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(M_x(t)\leqslant u_x(t,x_1),M_y(t)\leqslant u_y(t,y_1),M_x(t+s)\leqslant u_x(t+s,x_2),M_y(t+s)\leqslant u_y(t+s,y_2))=$$

$$=\big(1+(r_1e^{-x_1}\vee r_2e^{-x_2}+r_1e^{-y_1}\vee r_2e^{-y_2})+(1-r_1)(e^{-x_1}+e^{-y_1})+(1-r_2)(e^{-x_2}+e^{-y_2})\big)^{-1}.$$

Для копулы Гумбеля $D(u,v) = \exp\{-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\}$, $\theta \geqslant 1$, получаем

$$\mathbf{E}\Big(D\big(G_x^{r_1}(x_1) \wedge G_x^{r_2}(x_2), G_y^{r_1}(y_1) \wedge G_y^{r_2}(y_2)\big) D^{1-r_1}\big(G_x(x_1), G_y(y_1)\big) D^{1-r_2}\big(G_x(x_2), G_y(y_2)\big)\Big)^W =$$

$$= \Big(1 + (r_1 e^{-\theta x_1} \vee r_2 e^{-\theta x_2} + r_1 e^{-\theta y_1} \vee r_2 e^{-\theta y_2})^{\frac{1}{\theta}} + (1-r_1)(e^{-\theta x_1} + e^{-\theta y_1})^{\frac{1}{\theta}} + (1-r_2)(e^{-\theta x_2} + e^{-\theta y_2})^{\frac{1}{\theta}}\Big)^{-1}.$$

4. Интенсивности скачков вверх и вниз. В [6] были найдены предельные интенсивности скачков максимумов одного признака: $\lambda_+ = \lambda\mu$ для скачков вверх, $\lambda_- = \lambda$ для скачков вниз.

В случае двух признаков обозначим через $\lambda_{+,x\cup y}$ и $\lambda_{-,x\cup y}$ предельные интенсивности скачков вверх и вниз хотя бы по одной компоненте, а через $\lambda_{+,x\cap y}$ и $\lambda_{-,x\cap y}$ — предельные интенсивности совместных скачков вверх и вниз. Эти величины можно вывести из общего вида конечномерных распределений, однако мы используем более простой подход.

Теорема 2. *Предельные интенсивности скачков вверх и вниз хотя бы по одной компоненте равны*

$$\lambda_{+,x\cup y} = \lambda\mu \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(-\ln D(u,v)\Big) dD(u,v), \quad \lambda_{-,x\cup y} = \lambda \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(-\ln D(u,v))\Big) dD(u,v).$$

Предельные интенсивности совместных скачков вверх и вниз равны

$$\lambda_{+,x\cap y} = \lambda\mu\Bigg(2 - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(-\ln D(u,v)\Big) dD(u,v)\Bigg), \quad \lambda_{-,x\cap y} = \lambda\Bigg(2 - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(-\ln D(u,v))\Big) dD(u,v)\Bigg).$$

Доказательство. Пусть в момент времени t общее число частиц равно N. В последующий малый промежуток времени δ среднее число делений частиц составит $\lambda N\delta + o(\delta)$, причем вероятность ровно одного деления равна $\lambda N\delta + o(\delta)$, а более одного равна $o(\delta)$, так что последней возможностью при расчете интенсивностей можно пренебречь. Скачок вверх происходит, если среди новых частиц максимум хотя бы одного из признаков оказывается больше, чем у имевшихся N. Вероятность этого составляет

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Big(1 - h(F(x,y))\Big) dF^N(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Big(p_1(1 - F(x,y)) + p_2(1 - F^2(x,y)) + \ldots\Big) dF^N(x,y) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Big(p_1(1 - C(F_x(x), F_y(y))) + p_2(1 - C^2(F_x(x), F_y(y))) + \ldots\Big) dC^N(F_x(x), F_y(y)).$$

Сделаем замену переменных $u = F_x(x),\ v = F_y(y)$, $w(u,v) = C^N(F_x(x), F_y(y)) = C^N(u,v)$ и используем формулу $x^{\frac{1}{N}} = 1 + \frac{1}{N}\ln x + o(N^{-1})$ при $x > 0,\ N \to \infty$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(p_1(1 - w^{\frac{1}{N}}(u,v)) + p_2(1 - w^{\frac{2}{N}}(u,v)) + \ldots\Big) dw(u,v) \sim$$

$$\sim \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{N}\Big(-\ln w(u,v)\Big)(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots) dw(u,v) = \frac{\mu}{N} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(-\ln w(u,v)\Big) dw(u,v).$$

При $N \to \infty$ верно $w(u^{1/N}, v^{1/N}) \to D(u,v)$. Таким образом, при $t \to \infty$ имеем

$$\lambda_{+,x\cup y} = \lambda\mu \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \Big(-\ln D(u,v)\Big) dD(u,v).$$

Найдем $\lambda_{+,x\cap y}$. Ясно, что $\lambda_{+,x\cap y}+\lambda_{+,x\cup y}=\lambda_{+,x}+\lambda_{+,y}=2\lambda\mu$, т.е. $\lambda_{+,x\cap y}=2\lambda\mu-\lambda_{+,x\cup y}$.

Найдем $\lambda_{-,x\cap y}$. Совместный скачок вниз происходит, если в популяции есть частица, превосходящая остальные частицы и своих потомков по обоим признакам, и она делится. Если частиц N, то вероятность для каждой превосходить остальные частицы и своих потомков по обоим признакам будет равна разности удвоенной вероятности превосходить по одному признаку и вероятности превосходить хотя бы по одному признаку:

$$2\int\limits_0^1 h(u)u^{N-1}du-\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}(1-F(x,y))\,d\left(h(F(x,y))F^{N-1}(x,y)\right).$$

Поскольку такая частица может быть только одна, то эти вероятности суммируются и аналогично предыдущему получаем при $N\to\infty$

$$N\left(2\int\limits_0^1 h(u)u^{N-1}du-\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}(1-F(x,y))\,d\left(h(F(x,y))F^{N-1}(x,y)\right)\right)\to 2-\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big(-\ln D(u,v)\Big)dD(u,v).$$

Вероятность того, что эта частица делится (если она есть) за время δ, равна $\lambda\delta+o(\delta)$. Предельная интенсивность совместного скачка вниз является пределом произведения этих вероятностей, деленного на промежуток времени δ, т.е.

$$\lambda_{-,x\cap y}=\lambda\left(2-\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big(-\ln D(u,v)\Big)dD(u,v)\right).$$

А значит, предельная интенсивность скачков вниз равна

$$\lambda_{-,x\cup y}=2\lambda_{-}-\lambda_{-,x\cap y}=\lambda\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big(-\ln D(u,v)\Big)dD(u,v).$$

□

При независимых признаках имеем $D(u,v)=uv$, значит, $\lambda_{+,x\cup y}=2\lambda\mu$, $\lambda_{+,x\cap y}=0$ и $\lambda_{-,x\cup y}=2\lambda$, $\lambda_{-,x\cap y}=2\lambda-\lambda_{-,x\cup y}=0$.

Пусть $\zeta=D(U,V)$ — случайная величина, распределение которой называется распределением Кендалла для копулы D [9, § 5.1.1]. Тогда интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1(-\ln D(u,v))dD(u,v)$ можно представить в виде $\mathbf{E}(-\ln\zeta)$. Для архимедовых копул функция распределения Кендалла $K_D(t)=t-\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$ при $t\in[0,1)$.

Пример 3. Найдем предельную интенсивность скачков вверх для копулы Гумбеля. Тогда $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{t\ln t}{\theta}$, значит, $K_D(t)=t-\frac{t\ln t}{\theta}$ и плотность Кендалла равна $\big(K_D(t)\big)'=1-\frac{\ln t+1}{\theta}$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1(-\ln D(u,v))\,dD(u,v)=\mathbf{E}(-\ln\zeta)=\int\limits_0^1(-\ln t)\left(1-\frac{\ln t+1}{\theta}\right)dt=1+\frac{1}{\theta}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{+,x\cup y}(t)=\lambda\mu\int\limits_0^1\int\limits_0^1(-\ln D(u,v))dD(u,v)=\lambda\mu\frac{\theta+1}{\theta},\ \ \lambda_{+,x\cap y}(t)=2\lambda\mu-\lambda_{+,x\cup y}(t)=\lambda\mu\frac{\theta-1}{\theta}.$$

В случае независимых признаков предельная интенсивность совместных скачков как вверх, так и вниз равна нулю. Оказывается, тогда они могут происходить лишь конечное число раз за все время.

Теорема 3. *Пусть $h(s) = s^2$, тогда в случае независимых признаков среднее число совместных скачков Y_+ и Y_- вверх и вниз соответственно за все время равно*

$$Y_+ = 4\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}\right) = \frac{2\pi^2}{3} - 5 \approx 1{,}579736, \quad Y_- = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \approx 0{,}394934.$$

Доказательство. Поскольку $h(s) = s^2$, то $\mu = 2$ и $Z(t)$ имеет геометрическое распределение с $p = e^{-\lambda t}$ и $q = 1 - e^{-\lambda t}$ (см. пример 1). Посчитаем среднее число совместных скачков вверх за все время. Аналогично теореме 2 вероятность ровно одного деления для N частиц за время δ равна $\lambda N\delta + o(\delta)$, более одного равна $o(\delta)$, так что последней возможностью при расчете интенсивностей можно пренебречь. Вероятность скачка по одному признаку равна вероятности того, что максимальным признаком обладает одна из двух появившихся частиц среди имеющихся $N+1$ и поделившейся, т.е. $\frac{2}{N+2}$. Так как признаки независимы, то вероятность совместного скачка равна произведению вероятностей скачков по каждому из признаков. Таким образом, вероятность скачка в случае N частиц равна $\lambda N\delta\left(\frac{2}{N+2}\right)^2 + o(\delta)$. А значит, по формуле полной вероятности получаем $\lambda\delta\mathbf{E}\left(Z(t)\left(\frac{2}{Z(t)+2}\right)^2\right) + o(\delta)$. Среднее число скачков равно интегралу по вероятности совместных скачков за время dt от 0 до ∞.

Таким образом,

$$Y_+ = \lambda\int\limits_0^{+\infty}\mathbf{E}\left(Z(t)\left(\frac{2}{Z(t)+2}\right)^2\right)dt = \lambda\int\limits_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p\frac{4n}{(n+2)^2}\right)dt =$$

$$= \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+2)^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}dt.$$

Посчитаем интеграл. Сделав замену переменной $x = e^{-\lambda t}$, будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}dt = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{1}{\lambda n}.$$

А значит,

$$Y_+ = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2} = 4\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}\right) \approx 1{,}579736.$$

Найдем среднее число совместных скачков вниз. Для каждой из N частиц вероятность превосходить остальные и своих потомков по одному признаку равна $\frac{1}{N+2}$. Так как признаки независимы, то вероятность совместного скачка равна произведению вероятностей скачков по каждому из признаков. Вероятность, что эта частица делится за время δ, равна $\lambda\delta + o(\delta)$. Таким образом, вероятность скачка в случае N частиц есть $\lambda\delta\frac{N}{(N+2)^2} + o(\delta)$. А значит, по формуле полной вероятности получаем $\lambda\delta\mathbf{E}\left(\frac{Z(t)}{(Z(t)+2)^2}\right) + o(\delta)$. Среднее число скачков равно интегралу по вероятности совместных скачков за время dt от 0 до ∞.

Таким образом,

$$Y_- = \lambda\int\limits_0^{+\infty}\mathbf{E}\left(\frac{Z(t)}{(Z(t)+2)^2}\right)dt =$$

$$= \lambda\int\limits_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p\frac{n}{(n+2)^2}\right)dt = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}dt.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$Y_- = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \approx 0{,}394934.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold B.C., Villasenor J.A.* The tallest man in the world // Statistical theory and applications. Papers in honor of H. A. David. N.Y.: Springer, 1996. 81–88.
2. *Pakes A.G.* Extreme order statistics on Galton–Watson trees // Metrika. 1998. **47**, N 1. 95–117.
3. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. М.: Матем. ин-т РАН, 2008.
4. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
5. *Mitov K.V., Yanev G.P.* Maximum individual score in critical two-type branching processes // C. r. Acad. Bulg. Sci. 2002. **55**, N 11. 7–22.
6. *Lebedev A.V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time // Extremes. 2008. **11**, N 2. 203–216.
7. *Лебедев А.В.* Неклассические задачи стохастической теории экстремумов: Докт. дис. М., 2016.
8. *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с максимум-линейной наследственностью // Матем. заметки. 2019. **105**, № 3. 395–405.
9. *Nelsen R.* An Introduction to Copulas. N.Y.: Springer, 2006.

Поступила в редакцию
15.03.2019

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

К. А. Мирзоев[1], Н. Н. Конечная[2]

В работе получены асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для фундаментальной системы решений уравнения

$$l(y) := i^{2n+1}\{(qy^{(n+1)})^{(n)} + (qy^{(n)})^{(n+1)}\} + py = \lambda y, \qquad x \in I := [1, +\infty),$$

где λ — комплексный параметр. Предполагается, что q — положительная, непрерывно дифференцируемая функция, p имеет вид $p = \sigma^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где σ — локально интегрируемая на I функция, а производная понимается в смысле теории распределений. Эти формулы в случае, когда $k = 0$ и $\lambda \neq 0$, коэффициенты q и p выражения $l(y)$ таковы, что $q = 1/2 + q_1$, а $q_1, \sigma (= p)$ интегрируемы на I, хорошо известны. Установлено, что они справедливы при этих же ограничениях на q_1 и σ для любого $1 \leqslant k \leqslant n-1$. При $k = n$ на эти функции налагаются дополнительные органичения. Отдельно рассматривается случай, когда $\lambda = 0$.

Получены также асимптотические формулы для решений уравнения $l(y) = \lambda y$ при условии, когда $q(x) = \alpha x^{2n+1+\nu}(1 + r(x))^{-2}$, $\sigma(x) = x^{k+\nu}(\beta + s(x))$, где $\alpha \neq 0$ и β — комплексные числа, $\nu \geqslant 0$, а функции r и s удовлетворяют некоторым условиям интегрального убывания.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с коэффициентами-распределениями, квазипроизводные, асимптотика решений дифференциальных уравнений.

Asymptotic formulas are obtained in the paper for $x \to +\infty$ for the fundamental system of solutions to the equation

$$l(y) := i^{2n+1}\{(qy^{(n+1)})^{(n)} + (qy^{(n)})^{(n+1)}\} + py = \lambda y, \qquad x \in I := [1, +\infty),$$

[1] *Мирзоев Карахан Агахан оглы* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mirzoev.karahan@mail.ru.

[2] *Конечная Наталья Николаевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа, алгебры и геометрии САФУ, e-mail: n.konechnaya@narfu.ru.

Mirzoev Karakhan Agakhan ogly — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

Konechnaya Natal'ya Nikolaevna —Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Northern (Arctic) Federal University, Chair of Mathematical Analysis, Algebra, and Geometry.