Математика

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ЧАСТНЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКАХ $L_{p_1\infty}$ И $L_{\infty p_2}$ ЧЕРЕЗ ЧАСТНЫЕ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКАХ $L_{p_1p_2}$

М. К. Потапов[1], **Б. В. Симонов**[2]

В работе изучается взаимосвязь между частными модулями гладкости положительных порядков, рассматриваемыми в метриках $L_{p_1\infty}, L_{\infty p_2}$ и $L_{p_1p_2}$.

Ключевые слова: неравенство, метрика, частный модуль гладкости положительного порядка.

Interrelation between partial moduli of smoothness of positive order considered in metrics of $L_{p_1\infty}, L_{\infty p_2}$, and $L_{p_1p_2}$ is studied.

Key words: inequality, metrics, partial moduli of smoothness of positive order.

Взаимосвязи между смешанными и полными модулями гладкости функции, рассматриваемой в пространствах с различными метриками, изучались в ряде работ (см., например, [1–4]). В настоящей работе приводятся оценки частных модулей гладкости в метриках $L_{p_1\infty}$ и $L_{\infty p_2}$ через частные модули гладкости в метриках $L_{p_1p_2}$.

1. Определения и обозначения. Введем следующие обозначения:

$L_{p_1p_2}, 1 \leqslant p_i \leqslant \infty, i = 1, 2,$ — множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π-периодических по каждому переменному, таких, что $\|f\|_{p_1,p_2} = \|\{\|f\|_{p_1}\}\|_{p_2} < \infty$, где $\|F\|_{p_i} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |F|^{p_i} dx_i\right)^{\frac{1}{p_i}}$, если $1 \leqslant p_i < \infty$, $\|F\|_{p_i} = \sup\limits_{0\leqslant x_i\leqslant 2\pi} \mathrm{vrai}\,|F|$, если $p_i = \infty$;

$L^0_{p_1p_2}$ — множество функций $f \in L_{p_1p_2}$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1;

$\sigma(f)$ — ряд Фурье функции $f(x_1, x_2) \in L^0_{p_1p_2}$, т.е. $\sigma(f) \equiv \sigma(f, x_1, x_2) \equiv \sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\sum\limits_{k_1=1}^{\infty} A_{k_1k_2}(f, x_1, x_2)$,

где $A_{k_1k_2}(f, x_1, x_2) = a_{k_1k_2} \cos k_1x_1 \cos k_2x_2 + b_{k_1k_2} \sin k_1x_1 \cos k_2x_2 + c_{k_1k_2} \cos k_1x_1 \sin k_2x_2 + d_{k_1k_2} \times \sin k_1x_1 \sin k_2x_2$,

$a_{k_1k_2} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \cos k_1x_1 \cos k_2x_2 dx_1dx_2$, $\quad b_{k_1k_2} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \sin k_1x_1 \cos k_2x_2 dx_1dx_2$,

$c_{k_1k_2} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \cos k_1x_1 \sin k_2x_2 dx_1dx_2$, $\quad d_{k_1k_2} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \sin k_1x_1 \sin k_2x_2 dx_1dx_2$;

$V_{m_1,\infty}(f), V_{\infty,m_2}(f)$ — суммы Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f(x_1, x_2)$, т.е.

$$V_{m_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1 + t_1, x_2)V^{2m_1}_{m_1}(t_1)dt_1, \quad V_{\infty,m_2}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2 + t_2)V^{2m_2}_{m_2}(t_2)dt_2,$$

где $V^0_0(t) = D_0(t)$, $V^{2n}_n(t) = \frac{D_n(t)+\ldots+D_{2n-1}(t)}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $D_m(t) = \frac{\sin{(m+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$;

[1] *Потапов Михаил Константинович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mkpotapov@mail.ru.

[2] *Симонов Борис Витальевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент Волгоград. гос. техн. ун-та, e-mail: simonov-b2002@yandex.ru.

Potapov Mikhail Konstantinovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

Simonov Boris Vital'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Volgograd State Technical University.

$f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производная в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)\in L^0_{p_1p_2}$ порядка ρ_1 ($\rho_1\geqslant 0$) по переменной x_1 и порядка ρ_2 ($\rho_2\geqslant 0$) по переменной x_2 (см. [5, с. 238]);

$E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f\in L_{p_1p_2}$ по переменной x_1, т.е. $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2}=\inf\limits_{T_{m_1\infty}}\|f-T_{m_1\infty}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{m_1\infty}(x_1,x_2)\in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше m_1 по переменной x_1;

$E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f\in L_{p_1p_2}$ по переменной x_2, т.е. $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2}=\inf\limits_{T_{\infty m_2}}\|f-T_{\infty m_2}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{\infty m_2}(x_1,x_2)\in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше m_2 по переменной x_2.

Для функции $f\in L_{p_1p_2}$ определим разности с шагами h_1 и h_2 положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 следующим образом:

$$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1}f(x_1+(\alpha_1-\nu_1)h_1,x_2),\quad \Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2}f(x_1,x_2+(\alpha_2-\nu_2)h_2),$$

где $\binom{\alpha}{\nu}=1$ для $\nu=0$, $\binom{\alpha}{\nu}=\alpha$ для $\nu=1$, $\binom{\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu\geqslant 2$.

Введем также обозначения:

$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1, т.е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}=\sup_{|h_1|\leqslant\delta_1}\|\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)\|_{p_1p_2};$$

$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2, т.е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}=\sup_{|h_2|\leqslant\delta_2}\|\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)\|_{p_1p_2};$$

$L^{(1)}_p, 1\leqslant p\leqslant\infty,$ — множество измеримых 2π-периодических функций одного переменного, для которых $\|f\|^{(1)}_p<\infty$, где $\|f\|^{(1)}_p=\left(\int\limits_0^{2\pi}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, если $1\leqslant p<\infty$, и $\|f\|^{(1)}_p=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}\mathrm{vrai}\,|f|$, если $p=\infty$;

$L^{0(1)}_p$ — множество функций $f\in L^{(1)}_p$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi}f(x)dx=0$;

$V^{(1)}_m(f)$ — суммы Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f(x)$, т.е. $V^{(1)}_m(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x+t)V^{2m}_m(t)dt$, $m=0,1,2,\dots;$

$f^{(\alpha)}(x)$ — производная в смысле Вейля функции $f(x)$ порядка $\alpha>0$ (см. [6, с. 201]);

$\sigma(f)^{(1)}$ — ряд Фурье функции $f(x)\in L^{0(1)}_p$, т.е. $\sigma(f)^{(1)}\equiv\sigma(f,x)^{(1)}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k(f,x)$, $A_k(f,x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos kx dx$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\sin kx dx$;

$\widetilde{f}(x)$ — функция, сопряженная с $f(x)$;

$T_n(\{\lambda_n\};x)$ — преобразованный с помощью последовательности $\{\lambda_n\}$ тригонометрический полином $T_n(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}(c_\nu\cos\nu x+d_\nu\sin\nu x)$, т.е.

$$T_n(\{\lambda_n\};x)=\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu(c_\nu\cos\nu x+d_\nu\sin\nu x);$$

$\omega_\alpha(f,t)^{(1)}_p$ — модуль гладкости положительного порядка α функции $f(x)$ в метрике $L^{(1)}_p$, т.е. $\omega_\alpha(f,t)^{(1)}_p=\sup\limits_{|h|\leqslant t}\|\Delta^\alpha_h f(x)\|^{(1)}_p$, где $\Delta^\alpha_h f(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\alpha}{\nu}f(x+(\alpha-\nu)h)$ — разность порядка $\alpha>0$ функции $f(x)$ (при целых α — это будет α-я разность, например при $\alpha=1$ имеем $\Delta^1_h f(x)=f(x+h)-f(x)$).

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ пишем $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \leqslant CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2) \ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать $F(f,\delta_1,\delta_2) \asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [7]. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}$, $g \in L^0_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty, \beta_i > \alpha_i > 0$, $i = 1,2$. *Тогда*

1) $\omega_{\alpha_1,0}(f,0)_{p_1p_2} = 0,\ \omega_{0,\alpha_2}(f,0)_{p_1p_2} = 0$;
2) $\omega_{\alpha_1,0}(f+g,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} + \omega_{\alpha_1,0}(g,\delta_1)_{p_1p_2}$;
$\omega_{0,\alpha_2}(f+g,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} + \omega_{0,\alpha_2}(g,\delta_2)_{p_1p_2}$;
3) $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}$, *если* $0 \leqslant \delta_1 \leqslant t_1$;
$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1p_2}$, *если* $0 \leqslant \delta_2 \leqslant t_2$;
4) $\frac{\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}}{\delta_1^{\alpha_1}} \ll \frac{\omega_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}}{t_1^{\alpha_1}}$, *если* $0 < t_1 \leqslant \delta_1 < \pi$;
$\frac{\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}}{\delta_2^{\alpha_2}} \ll \frac{\omega_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1p_2}}{t_2^{\alpha_2}}$, *если* $0 < t_2 \leqslant \delta_2 < \pi$;
5) $\omega_{\beta_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2},\ \ \omega_{0,\beta_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$.

Лемма 2 [7]. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}, 1 \leqslant p_i \leqslant \infty, \alpha_i > 0, n_i \in \mathbb{N}, i = 1,2$. *Тогда*

(a) $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - V_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_1^{-\alpha_1}\big\|V^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2}$;

(б) $\omega_{0,\alpha_2}\Big(f,\frac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - V_{\infty n_2}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_2^{-\alpha_2}\big\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}$.

Лемма 3. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}, 1 \leqslant p_i \leqslant \infty, n_i = 0,1,2,\ldots, i = 1,2$. *Тогда*

(a) $\|f - V_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll \|\sum\limits_{\nu_1=n_1}^{\infty}(V_{2^{\nu_1}\infty}(f) - V_{2^{\nu_1+1}\infty}(f))\|_{p_1p_2}$;

(б) $\|f - V_{\infty 2^{n_2}}(f)\|_{p_1p_2} \ll \|\sum\limits_{\nu_2=n_2}^{\infty}(V_{\infty 2^{\nu_2}}(f) - V_{\infty 2^{\nu_2+1}}(f))\|_{p_1p_2}$.

Доказательство. (а). Так как для любого натурального числа $M_1 \geqslant n_1$ верно равенство

$$f - V_{2^{n_1}\infty}(f) = \sum_{\nu_1=n_1}^{M_1}(V_{2^{\nu_1+1}\infty}(f) - V_{2^{\nu_1}\infty}(f)) + f - V_{2^{M_1+1}\infty}(f),$$

то

$$\|f - V_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2} \leqslant \left\|\sum_{\nu_1=n_1}^{M_1}(V_{2^{\nu_1+1}\infty}(f) - V_{2^{\nu_1}\infty}(f))\right\|_{p_1p_2} + \|f - V_{2^{M_1+1}\infty}(f)\|_{p_1p_2}.$$

В силу [8, с. 30, лемма 2.3.1] имеем $\|f - V_{2^{M_1+1}\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll E_{2^{M_1+1}\infty}(f)_{p_1p_2}$ и $E_{2^{M_1+1}\infty}(f)_{p_1p_2} \to 0$ при $M_1 \to \infty$, поэтому

$$\|f - V_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll \left\|\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}(V_{2^{\nu_1+1}\infty}(f) - V_{2^{\nu_1}\infty}(f))\right\|_{p_1p_2},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство п. (б) проводится аналогично.

Лемма 4 [9]. (а) *Пусть функция* $T_{2^{n_1},\infty} \in L_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1,2)$, *и является тригонометрическим полиномом порядка* 2^{n_1} *по переменной* x_1, $1 \leqslant p_1 < q_1 \leqslant \infty$, $q_1^* = q_1$, *если* $q_1 < \infty$, *и* $q_1^* = 1$, *если* $q_1 = \infty, N_1 \leqslant N_2, N_i \in \mathbb{N}, i = 1,2$. *Тогда*

$$\left\|\sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},\infty}\right\|_{q_1p_2} \leqslant C\left(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|T_{2^{n_1},\infty}\|^{q_1^*}_{p_1p_2}\right)^{1/q_1^*},$$

где постоянная C *не зависит от* N_1, N_2 *и* $T_{2^{n_1},\infty}, n_1 \in [N_1,N_2]$.

(б) *Пусть функция* $T_{\infty,2^{n_2}} \in L_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1,2)$, *и является тригонометрическим полиномом порядка* 2^{n_2} *по переменной* x_2, $1 \leqslant p_2 < q_2 \leqslant \infty$, $q_2^* = q_2$, *если* $q_2 < \infty$, *и* $q_2^* = 1$, *если* $q_2 = \infty, M_1 \leqslant M_2, M_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$. *Тогда*

$$\left\|\sum_{n_2=M_1}^{M_2} T_{\infty,2^{n_2}}\right\|_{p_1q_2} \leqslant C\left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2q_2^*(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\|T_{\infty,2^{n_2}}\|^{q_2^*}_{p_1p_2}\right)^{1/q_2^*},$$

где постоянная C *не зависит от* M_1, M_2 *и* $T_{\infty,2^{n_2}}, n_2 \in [M_1,M_2]$.

Лемма 5 (неравенство Никольского [10]). (а) *Пусть функция* $T_{n_1\infty}(x_1, x_2)$ *есть тригонометрический полином порядка не выше* $n_1 (n_1 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_1 *и* $T_{n_1\infty}(x_1, x_2) \in L_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty, i = 1, 2,\ \alpha_1 > 0$. *Тогда*

$$\|T^{(\alpha_1,0)}_{n_1\infty}\|_{p_1p_2} \ll n_1^{\alpha_1}\|T_{n_1\infty}\|_{p_1p_2}.$$

(б) *Пусть функция* $T_{\infty n_2}(x_1, x_2)$ *есть тригонометрический полином порядка не выше* $n_2 (n_2 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_2 *и* $T_{\infty n_2}(x_1, x_2) \in L_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty, i = 1, 2,\ \alpha_2 > 0$. *Тогда*

$$\|T^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}\|_{p_1p_2} \ll n_2^{\alpha_2}\|T_{\infty,n_2}\|_{p_1p_2}.$$

Лемма 6 [11, с. 99]. *Существует постоянная* C, *не зависящая от* n *и* x, *такая, что*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\Big| \leqslant C.$$

Лемма 7. (а) *Пусть функция* $T_{n_1,\infty}(x_1, x_2) \in L^0_{p_1p_2}$, $1 = p_1 < q_1 = \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, *и пусть* $T_{n_1,\infty}(x_1, x_2)$ *есть тригонометрический полином порядка не выше* $n_1 (n_1 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_1. *Тогда*

$$\|T_{n_1,\infty}\|_{\infty p_2} \leqslant C_1\|T^{(1,0)}_{n_1,\infty}\|_{1,p_2},$$

где постоянная C_1 *не зависит от* $T_{n_1,\infty}$.

(б) *Пусть функция* $T_{\infty,n_2}(x_1, x_2) \in L^0_{p_1p_2}$, $1 = p_2 < q_2 = \infty$, $1 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, *и пусть* $T_{\infty,n_2}(x_1, x_2)$ *есть тригонометрический полином порядка не выше* $n_2 (n_2 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_2. *Тогда*

$$\|T_{\infty,n_2}\|_{p_1\infty} \leqslant C_2\|T^{(0,1)}_{\infty,n_2}\|_{p_1,1},$$

где постоянная C_2 *не зависит от* T_{∞,n_2}.

Доказательство. (а). Для почти всех x_1 и x_2 имеем

$$T_{n_1,\infty}(x_1, x_2) = -\int_{-\pi}^{\pi} T^{(1,0)}_{n_1,\infty}(x_1 + t_1, x_2)K_{n_1}(t_1)dt_1,$$

где $K_{n_1}(t_1) = \sum\limits_{k_1=1}^{n_1}\frac{\sin k_1x_1}{k_1}$. Но тогда для почти всех x_1 и x_2 получаем справедливость следующего неравенства:

$$|T_{n_1,\infty}(x_1, x_2)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |T^{(1,0)}_{n_1,\infty}(x_1 + t_1, x_2)||K_{n_1}(t_1)|dt_1.$$

Применяя лемму 6, для почти всех x_1 и x_2 заключаем, что

$$|T_{n_1,\infty}(x_1, x_2)| \leqslant C_1\int_{-\pi}^{\pi} |T^{(1,0)}_{n_1,\infty}(x_1 + t_1, x_2)|dt_1 = C_1\int_{-\pi}^{\pi} |T^{(1,0)}_{n_1,\infty}(x_1, x_2)|dx_1.$$

Но тогда для почти всех x_2 получаем

$$\|T_{n_1,\infty}(x_1, x_2)\|^{(1)}_{\infty} \leqslant C_1\|T^{(1,0)}_{n_1,\infty}(x_1, x_2)\|^{(1)}_1.$$

Откуда следует неравенство

$$\|T_{n_1,\infty}(x_1, x_2)\|_{\infty p_2} \leqslant C_1\|T^{(1,0)}_{n_1,\infty}(x_1, x_2)\|_{1p_2},$$

что и требовалось доказать.

Докажем п. (б). Для почти всех x_1 и x_2 имеем

$$T_{\infty,n_2}(x_1, x_2) = -\int_{-\pi}^{\pi} T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1, x_2 + t_2)K_{n_2}(t_2)dt_2,$$

где $K_{n_2}(t_2) = \sum\limits_{k_2=1}^{n_2} \frac{\sin k_2 x_2}{k_2}$. Но тогда для почти всех x_1 и x_2 получаем

$$|T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2+t_2)||K_{n_2}(t_2)|dt_2.$$

Применяя лемму 6, для почти всех x_1 и x_2 приходим к неравенству

$$|T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)| \leqslant C\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2+t_2)dt_2 = C\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)|dx_2. \qquad (1)$$

1) Пусть $1 \leqslant p_1 < \infty$. Тогда получаем справедливость неравенства

$$A \equiv \Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1\Bigg)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant C\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Bigg|\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)|dx_2\Bigg|^{p_1} dx_1\Bigg)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Применяя неравенство Минковского, имеем

$$A \leqslant C\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)^{(0,1)}\Big|^{p_1} dx_1\Bigg)^{\frac{1}{p_1}} dx_2 = C\|T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{p_1,1}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{0\leqslant x_1\leqslant 2\pi}\mathrm{vrai}\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)|^{p_1} dx_1\Bigg)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant C\|T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{p_1,1},$$

т.е. $\|T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{p_1,\infty} \leqslant C\|T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{p_1,1}$.

2) Пусть $p_1 = \infty$. Тогда из (1) следует, что

$$\sup_{0\leqslant x_1\leqslant 2\pi}\mathrm{vrai}\,|T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)| \leqslant C\|T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{\infty,1}.$$

Откуда получаем $\|T_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{\infty,\infty} \leqslant C\|T^{(0,1)}_{\infty,n_2}(x_1,x_2)\|_{\infty,1}$.

Лемма 8 [5, с. 243]. *Пусть* $f(x_1,x_2) \in L^0_{p_1p_2}$, $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$, $\alpha_i \geqslant 0$, $r_i = \alpha_i + \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\|f^{(\alpha_1,\alpha_2)}\|_{q_1q_2} \ll \|f^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2}.$$

Лемма 9 (неравенство Гёльдера [8, с. 14]). *Пусть* $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \Bigg(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма 10 [8, с. 51]. *Пусть* $f \in L^{0(1)}_p$, $f^{(r)} \in L^{0(1)}_p$, $\sigma(f)^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, a_k \geqslant a_{k+1} \quad \textit{для любого } k \in \mathbb{N},\ 1 < p < \infty,\ r \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\|f^{(r)}\|^{(1)}_p \asymp \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{(r+1)p-2}\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 11 [8, с. 12]. *Пусть* $f \in L_p^{0(1)}$, $1 < p < \infty$, $\sigma(f)^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. *Пусть* $\widetilde{f}(x)$ *— функция, сопряженная с функцией* $f(x)$. *Тогда*

$$\sigma(\widetilde{f})^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx), \quad \widetilde{f} \in L_p^{0(1)} \quad \textit{и} \quad \|\widetilde{f}\|_p^{(1)} \ll \|f\|_p^{(1)}.$$

Лемма 12. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_1 < q_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $\beta_1^{(1)} > 0$, $\beta_1^{(2)} > 0$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $q_1^* = q_1$, *если* $q_1 < \infty$, *и* $q_1^* = 1$, *если* $q_1 = \infty$, $\delta \in (0,1)$. *Тогда*

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{q_1p_2} \ll \delta^{\alpha_1}\left(\int\limits_{\delta}^{1}\left[t^{-(\alpha_1+\theta_1)}\omega_{\beta_1^{(1)},0}(f,t)_{p_1p_2}\right]^{q_1^*}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} + \left(\int\limits_{0}^{\delta}\left[t^{-\theta_1}\omega_{\beta_1^{(2)},0}(f,t)_{p_1p_2}\right]^{q_1^*}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

Доказательство. Для любого $\delta \in (0,1)$ существует целое неотрицательное число n, такое, что $2^{-n-1} \leqslant \delta < 2^{-n}$. Поэтому, используя свойство 3 частного модуля гладкости (лемма 1), а затем лемму 2, получаем

$$J = \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{q_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,2^{-n})_{q_1p_2} \ll \|f - V_{2^n,\infty}(f)\|_{q_1p_2} + 2^{-n\alpha_1}\|V_{2^n,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f)\|_{q_1p_2} = J_1 + J_2.$$

Применяя сначала лемму 3, а затем лемму 4, находим

$$J_1 \ll \left\|\sum_{\nu=n}^{\infty}(V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{2^{\nu+1},\infty}(f))\right\|_{q_1p_2} \ll \left(\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{2^{\nu+1},\infty}(f)\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|f - V_{2^\nu,\infty}(f)\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} + \left(\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|f - V_{2^{\nu+1},\infty}(f)\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

В силу леммы 2 будем иметь

$$J_1 \ll \left(\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\omega^{q_1^*}_{\beta_1^{(2)},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

Так как $f \in L^0_{p_1p_2}$, то $V_{0,\infty}(f) = 0$, поэтому

$$J_2 = 2^{-n\alpha_1}\|V_{2^n,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f)\|_{q_1p_2} = 2^{-n\alpha_1}\left\|\sum_{\nu=0}^{n}(V_{2^\nu,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f) - V_{[2^{\nu-1}],\infty}^{(\alpha_1,0)}(f))\right\|_{q_1p_2}.$$

Применяя лемму 4, имеем

$$J_2 \ll 2^{-n\alpha_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|(V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{[2^{\nu-1}],\infty}(f))^{(\alpha_1,0)}\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

Воспользовавшись леммой 5, приходим к неравенству

$$J_2 \ll 2^{-n\alpha_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu q_1^*(\alpha_1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|(V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{[2^{\nu-1}],\infty}(f))\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} \ll$$

$$\ll 2^{-n\alpha_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu q_1^*(\alpha_1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|f - V_{2^\nu,\infty}(f)\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} +$$

$$+2^{-n\alpha_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu q_1^*(\alpha_1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\|f - V_{[2^{\nu-1}],\infty}(f)\|_{p_1p_2}^{q_1^*}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

Применяя лемму 2, заключаем, что

$$J_2 \ll 2^{-n\alpha_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu q_1^*(\alpha_1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\omega^{q_1^*}_{\beta_1^{(1)},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

Объединяя оценки для J_1 и J_2, получаем

$$J \ll \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu q_1^*(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\omega^{q_1^*}_{\beta_1^{(2)},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} + 2^{-n\alpha_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu q_1^*(\alpha_1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\omega^{q_1^*}_{\beta_1^{(1)},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{q_1^*}}.$$

Используя свойства частного модуля гладкости (лемма 1), имеем

$$J \ll \left(\int\limits_0^\delta \left[t^{-\theta_1}\omega_{\beta_1^{(2)},0}(f,t)_{p_1p_2}\right]^{q_1^*}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1^*}} + \delta^{\alpha_1}\left(\int\limits_\delta^1 \left[t^{-(\alpha_1+\theta_1)}\omega_{\beta_1^{(1)},0}(f,t)_{p_1p_2}\right]^{q_1^*}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1^*}},$$

тем самым лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}$, $1 \leqslant p_2 < q_2 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $\beta_2^{(1)} > 0$, $\beta_2^{(2)} > 0$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $q_2^* = q_2$, *если* $q_2 < \infty$, *и* $q_2^* = 1$, *если* $q_2 = \infty$, $\delta \in (0,1)$. *Тогда*

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1q_2} \ll \delta^{\alpha_2}\left(\int\limits_\delta^1 \left[t^{-(\alpha_2+\theta_2)}\omega_{0,\beta_2^{(1)}}(f,t)_{p_1p_2}\right]^{q_2^*}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2^*}} + \left(\int\limits_0^\delta \left[t^{-\theta_2}\omega_{0,\beta_2^{(2)}}(f,t)_{p_1p_2}\right]^{q_2^*}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2^*}}.$$

Доказательство леммы 13 аналогично доказательству леммы 12.

3. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}$, $1 = p_1 < q_1 = \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $\alpha_1 > 0$, $\delta \in (0,1)$. *Тогда*

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty p_2} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{2}$$

Теорема 1 точна в том смысле, что существует функция $f_0(x_1,x_2)$, такая, что для нее в соотношении (2) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

Вообще говоря, в неравенстве (2) знак $\ll$ не может быть заменен на $\asymp$.

При $p_1 > 1$ неравенство (2) неверно.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L^0_{p_1p_2}$, $1 < p_1 < q_1 = \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $\delta \in (0,1)$.

2.1. *Тогда если* $\beta_1 > \alpha_1 > 0$, *то*

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty p_2} \ll \delta^{\alpha_1}\int\limits_\delta^1 t^{-(\alpha_1+\frac{1}{p_1})}\omega_{\beta_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Утверждение 2.1 точно в том смысле, что существует функция $f_0(x_1,x_2)$, такая, что для нее в соотношении (3) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

2.2. *Если* $\alpha_1 > \gamma_1 > 0$, *то*

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty,p_2} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{4}$$

Утверждение 2.2 точно в том смысле, что если в правой части неравенства (4) заменить γ_1 на α_1, то полученное неравенство будет несправедливо.

2.3. *Если* $\alpha_1 > 0$, *то*

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty,p_2} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Утверждение 2.3 точно в следующем смысле:

(а) для любой функции $\xi(t)$, положительной, слабо колеблющейся на $(0,1)$ и такой, что $\xi(t) = \bar{\bar{o}}\big(\ln\frac{2}{t}\big)^{1-\frac{1}{p_1}}$ при $t\to 0$, существует функция $F_1(x_1,x_2)$, такая, что

$$A_1(F_1,\delta) = \frac{\omega_{\alpha_1,0}(F_1,\delta)_{\infty,p_2}}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(F_1,t)_{p_1p_2}\xi(t)\frac{dt}{t}} \to \infty \ \text{ при } \ \delta\to 0;$$

(б) для любого $\varepsilon>0$ существует функция $F_2(x_1,x_2)$, такая, что

$$A_2(F_2,\delta) = \frac{\omega_{\alpha_1,0}(F_2,\delta)_{\infty,p_2}}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}+\varepsilon,0}(F_2,t)_{p_1p_2}\big(\ln\frac{2}{t}\big)^{1-\frac{1}{p_1}}\frac{dt}{t}} \to \infty \ \text{ при } \ \delta\to 0.$$

Теорема 3. *Пусть $f\in L^0_{p_1p_2}$, $1=p_2<q_2=\infty$, $1\leqslant p_1\leqslant\infty$, $\alpha_2>0$, $\delta\in(0,1)$. Тогда*

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1\infty} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_2}}\omega_{0,\alpha_2+\frac{1}{p_2}}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{6}$$

Теорема 3 точна в том смысле, что существует функция $f_0(x_1,x_2)$, такая, что для нее в соотношении (6) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

Вообще говоря, в неравенстве (6) не может быть заменен знак $\ll$ на $\asymp$.

При $p_2>1$ неравенство (6) неверно.

Теорема 4. *Пусть $f\in L^0_{p_1p_2}$, $1<p_2<q_2=\infty$, $1\leqslant p_1\leqslant\infty$, $\delta\in(0,1)$.*

4.1. *Тогда если $\beta_2>\alpha_2>0$, то*

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1\infty} \ll \delta^{\alpha_2}\int\limits_\delta^1 t^{-(\alpha_2+\frac{1}{p_2})}\omega_{0,\beta_2+\frac{1}{p_2}}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_2}}\omega_{0,\alpha_2+\frac{1}{p_2}}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{7}$$

Утверждение 4.1 точно в том смысле, что существует функция $f_0(x_1,x_2)$, такая, что для нее в соотношении (7) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

4.2. *Если $\alpha_2>\gamma_2>0$, то*

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1,\infty} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_2}}\omega_{0,\gamma_2+\frac{1}{p_2}}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{8}$$

Утверждение 4.2 точно в том смысле, что если в правой части неравенства (8) заменить γ_2 на α_2, то полученное неравенство будет несправедливо.

4.3. *Если $\alpha_2>0$, то*

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta)_{p_1,\infty} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_2}}\omega_{0,\alpha_2+\frac{1}{p_2}}(f,t)_{p_1p_2}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{1-\frac{1}{p_2}}\frac{dt}{t}. \tag{9}$$

Утверждение 4.3 точно в следующем смысле:

(а) для любой функции $\xi(t)$, положительной, слабо колеблющейся на $(0,1)$ и такой, что $\xi(t) = \bar{\bar{o}}\big(\ln\frac{2}{t}\big)^{1-\frac{1}{p_2}}$ при $t\to 0$, существует функция $F_3(x_1,x_2)$, такая, что

$$A_1(F_3,\delta) = \frac{\omega_{0,\alpha_2}(F_3,\delta)_{p_1,\infty}}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_2}}\omega_{0,\alpha_2+\frac{1}{p_2}}(F_3,t)_{p_1p_2}\xi(t)\frac{dt}{t}} \to \infty \ \text{ при } \ \delta\to 0;$$

(б) для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F_4(x_1, x_2)$, такая, что

$$A_2(F_4,\delta) = \frac{\omega_{0,\alpha_2}(F_4,\delta)_{p_1,\infty}}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_2}}\omega_{0,\alpha_2+\frac{1}{p_2}+\varepsilon}(F_4,t)_{p_1p_2}\big(\ln\frac{2}{t}\big)^{1-\frac{1}{p_2}}\frac{dt}{t}} \to \infty \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

4. Доказательство теоремы 1. Для любого $\delta \in (0,1)$ существует целое неотрицательное число n, такое, что $2^{-n-1} \leqslant \delta < 2^{-n}$. Поэтому, учитывая свойство 3 частного модуля гладкости (лемма 1), а затем лемму 2, получаем

$$J = \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{q_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,2^{-n})_{q_1p_2} \ll \|f - V_{2^n,\infty}(f)\|_{q_1p_2} + 2^{-n\alpha_1}\|V_{2^n,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f)\|_{q_1p_2} = J_1 + J_2.$$

Воспользовавшись сначала леммой 3, а затем леммой 4 и, наконец, леммой 2, имеем

$$J_1 \ll \Big\|\sum_{\nu=n}^{\infty}(V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{2^{\nu+1},\infty}(f))\Big\|_{q_1p_2} \ll \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\|V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{2^{\nu+1},\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll$$

$$\ll \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\|f - V_{2^\nu,\infty}(f)\|_{p_1p_2} + \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\|f - V_{2^{\nu+1},\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}.$$

Применяя лемму 7, а затем лемму 2, приходим к неравенству

$$J_2 = 2^{-n\alpha_1}\|V_{2^n,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f)\|_{q_1p_2} \ll 2^{-n\alpha_1}\|V_{2^n,\infty}^{(\alpha_1+1,0)}(f)\|_{p_1p_2} \ll 2^n\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^n})_{p_1p_2}.$$

Объединяя оценки для J_1 и J_2 и используя свойства частного модуля гладкости (лемма 1), имеем

$$J \ll \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t},$$

тем самым неравенство (2) доказано.

Теперь рассмотрим функцию $f_0(x_1,x_2) = \sin x_1 \sin x_2$. Для каждого $\delta \in (0,1)$ существует натуральное число m, такое, что $\frac{1}{m+1} < \delta \leqslant \frac{1}{m}$. Применяя свойства частного модуля гладкости (лемма 1), а затем лемму 2, для любого числа $\gamma > 0$ и любых $\mathcal{P}_i \in [1,\infty]$, $i = 1,2$, имеем $\omega_{\gamma,0}(f_0,\delta)_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2} \asymp \omega_{\gamma,0}(f_0,\frac{1}{m})_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2} \asymp \frac{1}{m^\gamma} \asymp \delta^\gamma$. Поэтому

$$\omega_{\alpha_1,0}(f_0,\delta)_{q_1p_2} \asymp \delta^{\alpha_1} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f_0,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_1}.$$

Из справедливости последних соотношений следует, что для функции $f_0(x_1,x_2)$ в соотношении (2) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

Покажем, что, вообще говоря, в неравенстве (2) нельзя заменить знак $\ll$ на $\asymp$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x_1,x_2) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{(\nu_1+1)^{\beta_1}}{2^{\nu_1\alpha_1}}\cos\Big(2^{\nu_1}x_1 - \frac{\pi\alpha_1}{2}\Big)\cdot\sin x_2 = g_1(x_1)\cdot\sin x_2,$$

где $\beta_1 > -1,\ \alpha_1 > 0$. Как показано в [8, с. 90],

$$\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}(g_1,\delta)_1^{(1)} \asymp \delta^{\alpha_1}\Big(\ln\frac{2}{\delta}\Big)^{\beta_1}, \quad \omega_{\alpha_1}(g_1,\delta)_\infty^{(1)} \asymp \delta^{\alpha_1}\Big(\ln\frac{2}{\delta}\Big)^{\beta_1+1}.$$

Так как $\omega_{\alpha_1,0}(f_1,\delta)_{\infty p_2} = \omega_{\alpha_1}(g_1,\delta)_\infty^{(1)}\cdot\|\sin x_2\|_{p_2}^{(1)}$, то, используя эти оценки, получим

$$\omega_{\alpha_1,0}(f_1,\delta)_{\infty,p_2} \asymp \delta^{\alpha_1}\Big(\ln\frac{2}{\delta}\Big)^{\beta_1+1}, \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f_1,t)_{1,p_2}\frac{dt}{t} \asymp \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}t^{\alpha_1}\Big(\ln\frac{2}{t}\Big)^{\beta_1}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_1-\frac{1}{p_1}}\Big(\ln\frac{2}{\delta}\Big)^{\beta_1}.$$

Таким образом, для функции $f_1(x_1, x_2)$ правая и левая части соотношения (2) имеют разные порядки как функции δ, что и означает, что в соотношении (2), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ на $\asymp$.

Покажем теперь, что неравенство (2) при $p_1 > 1$ неверно, т.е. не для всех функций $f \in L^0_{p_1p_2}$ справедливо утверждение

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty p_2} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $f_2(x_1,x_2) = g_2(x_1)\cdot \sin x_2$, где $g_2(x_1) = \sum\limits_{k_1=1}^{\infty} \frac{\cos k_1x_1}{k_1^{\alpha_1+1}\ln^{\frac{1}{p_1}}(k_1+1)}$, если $\alpha_1 \neq 2l+1$, и $g_2(x_1) = \sum\limits_{k_1=1}^{\infty} \frac{\sin k_1x_1}{k_1^{\alpha_1+1}\ln^{\frac{1}{p_1}}(k_1+1)}$, если $\alpha_1 = 2l+1$.

Как показано в [8, с. 93],

$$\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}\Big(g_2,\frac{1}{n}\Big)^{(1)}_{p_1} \asymp \frac{(\ln\ln(n+3))^{\frac{1}{p_1}}}{n^{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}}, \omega_{\alpha_1}(g_2,\delta)^{(1)}_\infty \gg \delta^{\alpha_1}\Big(\ln\frac{2}{\delta}\Big)^{1-\frac{1}{p_1}}.$$

Поскольку $\omega_{\alpha_1,0}(f_2,\delta)_{\infty p_2} = \omega_{\alpha_1}(g_2,\delta)^{(1)}_\infty \cdot \|\sin x_2\|^{(1)}_{p_2}$, то, применяя эти оценки, получим

$$\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f_2,t)_{p_1,p_2}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_1}\Big(\ln\ln\frac{3}{\delta}\Big)^{\frac{1}{p_1}}, \tag{11}$$

$$\omega_{\alpha_1,0}(f_2,\delta)_{\infty,p_2} \gg \delta^{\alpha_1}\Big(\ln\frac{2}{\delta}\Big)^{1-\frac{1}{p_1}}. \tag{12}$$

Ввиду того, что правые части соотношений (11) и (12) имеют разные порядки как функции δ, из справедливости соотношений (11) и (12) следует, что для функции $f_2(x_1,x_2)$ соотношение (10) неверно, а это и означает, что соотношение (2) при $p_1 > 1$ также неверно.

5. Доказательство теоремы 2. Полагая в лемме 12 $\beta_1^{(1)} = \beta_1 + \frac{1}{p_1}, \beta_1^{(2)} = \alpha_1 + \frac{1}{p_1}$, получим справедливость неравенства (3).

Теперь рассмотрим функцию $f_0(x_1,x_2) = \sin x_1 \sin x_2$. Как показано при доказательстве теоремы 1, для любого числа $\gamma > 0$ и любых $\mathcal{P}_i \in [1,\infty]$, $i = 1,2$, имеем $\omega_{\gamma,0}(f_0,\delta)_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2} \asymp \delta^\gamma$. Поэтому $\omega_{\alpha_1,0}(f_0,\delta)_{\infty p_2} \asymp \delta^{\alpha_1}$,

$$\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f_0,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_1}, \quad \delta^{\alpha_1}\int\limits_\delta^1 t^{-(\alpha_1+\frac{1}{p_1})}\omega_{\beta_1+\frac{1}{p_1},0}(f_0,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_1}.$$

Из справедливости последних соотношений следует, что для функции $f_0(x_1,x_2)$ в соотношении (3) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

Отметим, что при замене β_1 на α_1 в утверждении 2.1 для функции $f_0(x_1,x_2)$ в соотношении (3) нельзя заменить знак $\ll$ на $\asymp$.

Докажем теперь утверждение 2.2.

Полагая в лемме 12 $\beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1 + \frac{1}{p_1}$ и используя свойство 5 частного модуля гладкости (лемма 1), получаем

$$J = \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty,p_2} \ll \delta^{\alpha_1}\int\limits_\delta^1 t^{-(\alpha_1+\frac{1}{p_1})}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t} \equiv J_1 + J_2.$$

Применяя свойство 4 частного модуля гладкости (лемма 1) и учитывая, что $\gamma_1 < \alpha_1$, имеем

$$J_1 = \delta^{\alpha_1}\int\limits_\delta^1 \frac{\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}}{t^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}} t^{-(\alpha_1-\gamma_1)}\frac{dt}{t} \ll \delta^{\alpha_1}\frac{\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\delta)_{p_1p_2}}{\delta^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}}\int\limits_\delta^1 t^{-(\alpha_1-\gamma_1)}\frac{dt}{t} \ll$$

$$\ll \frac{\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\delta)_{p_1p_2}}{\delta^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}}\delta^{\gamma_1} \ll \frac{\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\delta)_{p_1p_2}}{\delta^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}}\int\limits_0^\delta t^{\gamma_1}\frac{dt}{t} \ll \int\limits_0^\delta \frac{\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}}{t^{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}}t^{\gamma_1}\frac{dt}{t} = J_2.$$

Следовательно, $J \ll J_2$, что и завершает доказательство соотношения (4).

Как показано при доказательстве теоремы 1, в случае $p_1 > 1$ существует функция $f_0 \in L^0_{p_1p_2}$, такая, что для нее несправедливо утверждение

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty,p_2} \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t}.$$

Это означает, что при замене γ_1 на α_1 в неравенстве (4) полученное неравенство будет неверно.

Докажем, наконец, утверждение 2.3.

Для любого $\delta \in (0,1)$ существует целое неотрицательное число n, такое, что $2^{-n-1} \leqslant \delta < 2^{-n}$. Поэтому в силу свойства 3 частного модуля гладкости (лемма 1) и леммы 2 имеем

$$J = \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta)_{\infty,p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,2^{-n})_{\infty,p_2} \ll$$

$$\ll \|f - V_{2^n,\infty}(f)\|_{\infty,p_2} + 2^{-n\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^n,\infty}(f)\|_{\infty,p_2} \equiv J_1 + J_2.$$

Применяя сначала лемму 3, а затем лемму 4, получаем

$$J_1 \ll \Big\|\sum_{\nu=n}^\infty (V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{2^{\nu+1},\infty}(f))\Big\|_{\infty,p_2} \ll \sum_{\nu=n}^\infty 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\|V_{2^\nu,\infty}(f) - V_{2^{\nu+1},\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll$$

$$\ll \sum_{\nu=n}^\infty 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\|f - V_{2^\nu,\infty}(f)\|_{p_1p_2} + \sum_{\nu=n}^\infty 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\|f - V_{2^{\nu+1},\infty}(f)\|_{p_1p_2}.$$

На основании леммы 2 заключаем, что

$$J_1 \ll \sum_{\nu=n}^\infty 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}.$$

Теперь оценим J_2. Пусть $\sigma(f,x_1,x_2) = \sum\limits_{\nu_2=1}^\infty\sum\limits_{\nu_1=1}^\infty A_{\nu_1\nu_2}(f,x_1,x_2)$. Тогда

$$\sigma(f^{(\alpha_1,0)},x_1,x_2) = \sum_{\nu_2=1}^\infty\sum_{\nu_1=1}^\infty \Big[\cos\frac{\alpha_1\pi}{2}A_{\nu_1\nu_2}(f,x_1,x_2) - \sin\frac{\alpha_1\pi}{2}B_{\nu_1\nu_2}(f,x_1,x_2)\Big]\nu_1^{\alpha_1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\nu_2=1}^\infty\sum_{\nu_1=1}^\infty A_{\nu_1\nu_2}(f^{(\alpha_1,0)},x_1,x_2),$$

где $B_{\nu_1\nu_2}(x_1,x_2)$ есть функция, сопряженная к функции $A_{\nu_1\nu_2}(x_1,x_2)$ по переменной x_1;

$$\sigma(f^{(\alpha_1+\frac{1}{p_1},0)},x_1,x_2) = \sum_{\nu_2=1}^\infty\sum_{\nu_1=1}^\infty \Big[\cos\frac{(\alpha_1+\frac{1}{p_1})\pi}{2}A_{\nu_1\nu_2}(f,x_1,x_2) -$$

$$-\sin\frac{(\alpha_1+\frac{1}{p_1})\pi}{2}B_{\nu_1\nu_2}(f,x_1,x_2)\Big]\nu_1^{\alpha_1+\frac{1}{p_1}} \equiv \sum_{\nu_2=1}^\infty\sum_{\nu_1=1}^\infty A_{\nu_1\nu_2}(f^{(\alpha_1+\frac{1}{p_1},0)},x_1,x_2).$$

Обозначим через $f^{*(\alpha_1+\frac{1}{p_1},0)}(x_1,x_2)$ функцию, такую, что

$$\sigma(f^{*(\alpha_1+\frac{1}{p_1},0)}(x_1,x_2)) = \sum_{\nu_2=1}^\infty\sum_{\nu_1=1}^\infty A_{\nu_1\nu_2}(f^{(\alpha_1,0)},x_1,x_2)\nu_1^{\frac{1}{p_1}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \Big[\cos \frac{\alpha_1 \pi}{2} A_{\nu_1 \nu_2}(f, x_1, x_2) - \sin \frac{\alpha_1 \pi}{2} B_{\nu_1 \nu_2}(f, x_1, x_2) \Big] \nu_1^{\alpha_1 + \frac{1}{p_1}}.$$

Тогда

$$\sigma(V_{2^n \infty}(f, x_1, x_2)) = \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{2^{n+1}-1} \lambda_{\nu_1} A_{\nu_1 \nu_2}(f, x_1, x_2),$$

$$\sigma(V_{2^n \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f, x_1, x_2)) = \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{2^{n+1}-1} \lambda_{\nu_1} A_{\nu_1 \nu_2}(f^{(\alpha_1, 0)}, x_1, x_2),$$

$$\sigma(V_{2^n \infty}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}, 0)}(f, x_1, x_2)) = \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{2^{n+1}-1} \lambda_{\nu_1} A_{\nu_1 \nu_2}(f^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}, 0)}, x_1, x_2),$$

$$\sigma(V_{2^n \infty}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}, 0)}(f, x_1, x_2)) = \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{2^{n+1}-1} \lambda_{\nu_1} A_{\nu_1 \nu_2}(f^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}, 0)}, x_1, x_2),$$

где

$$\lambda_{\nu_1} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant \nu_1 \leqslant 2^n; \\ 2 - \frac{\nu_1}{2^n}, & \text{если } 2^n + 1 \leqslant \nu_1 \leqslant 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Зафиксируем $x_2 = x_2^{(0)}$ и обозначим

$$V_{2^n}^{(\alpha_1)}(x_1)^{(1)} = V_{2^n \infty}^{(\alpha_1, 0)}(x_1, x_2^{(0)}),$$

$$V_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)} = V_{2^n \infty}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}, 0)}(x_1, x_2^{(0)}),$$

$$V_{2^n}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)} = V_{2^n \infty}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1}, 0)}(x_1, x_2^{(0)}).$$

Можно проверить, что

$$V_{2^n}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)} = V_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)} \cos \frac{\pi}{2p_1} + \widetilde{V}_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)} \sin \frac{\pi}{2p_1}, \tag{13}$$

где $\widetilde{V}_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}$ — функция, сопряженная к функции $V_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}$ по переменной x_1.

Легко проверить также, что

$$V_{2^n}^{(\alpha_1)}(x_1)^{(1)} = \int_0^{2\pi} V_{2^n}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(t)^{(1)} \overline{K}_{2^n}(x_1 - t) dt,$$

где $\overline{K}_{2^n}(t) = \sum_{\mu=1}^{2^{n+1}-1} \mu^{-\frac{1}{p_1}} \cos \mu t$. Применяя неравенство Гёльдера (лемма 8), получим

$$\|V_{2^n}^{(\alpha_1)}(x_1)^{(1)}\|_{\infty}^{(1)} \leqslant \|V_{2^n}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}\|_{p_1}^{(1)} \cdot \|\overline{K}_{2^n}\|_{p_1'}^{(1)}, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1. \tag{14}$$

В силу леммы 10 имеем

$$\|K_{2^n}\|_{p_1'}^{(1)} \leqslant \Big(\sum_{\mu=1}^{2^{n+1}-1} \big(\mu^{-\frac{1}{p_1}}\big)^{p_1'} \mu^{p_1' - 2} \Big)^{\frac{1}{p_1'}} = \Big(\sum_{\mu=1}^{2^{n+1}-1} \mu^{-1} \Big)^{\frac{1}{p_1'}} \ll \big(n+1\big)^{\frac{1}{p_1'}}.$$

Используя соотношение (13), а затем лемму 11, заключаем, что

$$\|V_{2^n}^{*(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}\|_{p_1}^{(1)} \ll \|V_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}\|_{p_1}^{(1)} + \|\widetilde{V}_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}\|_{p_1}^{(1)} \ll \|V_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}\|_{p_1}^{(1)}.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (14), получаем

$$\|V_{2^n}^{(\alpha_1)}(x_1)^{(1)}\|_{\infty}^{(1)} \ll \big(n+1\big)^{\frac{1}{p_1'}} \|V_{2^n}^{(\alpha_1 + \frac{1}{p_1})}(x_1)^{(1)}\|_{p_1}^{(1)}. \tag{15}$$

Соотношение (15) справедливо для почти всех x_2. Поэтому, применяя сначала неравенство (15), а затем лемму 2, имеем

$$J_2 = 2^{-n\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^n,\infty}(f)\|_{\infty,p_2} = 2^{-n\alpha_1}\left(\int\limits_0^{2\pi} |\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^n,\infty}(f,x_1,x_2)\|_\infty|^{p_2} dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll$$

$$\ll 2^{-n\alpha_1}\big(n+1\big)^{\frac{1}{p_1'}}\|V^{(\alpha_1+\frac{1}{p_1},0)}_{2^n,\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll 2^{n\frac{1}{p_1}}\big(n+1\big)^{\frac{1}{p_1'}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^n})_{p_1p_2}.$$

Таким образом,

$$J \ll 2^{n\frac{1}{p_1}}\big(n+1\big)^{\frac{1}{p_1'}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^n})_{p_1p_2} + \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,\frac{1}{2^\nu})_{p_1p_2}.$$

Так как

$$m^{\frac{1}{p_1}}\big(\ln(m+1)\big)^{\frac{1}{p_1'}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}\left(f,\frac{1}{m}\right)_{p_1p_2} \ll \sum_{\nu=m+1}^{2m}\nu^{\frac{1}{p_1}-1}\big(\ln\nu\big)^{\frac{1}{p_1'}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_{p_1p_2} \ll$$

$$\ll \sum_{\nu=m+1}^{\infty}\nu^{\frac{1}{p_1}-1}\big(\ln\nu\big)^{\frac{1}{p_1'}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}\left(f,\frac{1}{\nu}\right)_{p_1p_2},$$

то, используя свойства частного модуля гладкости (лемма 1), получаем

$$J \ll \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{\frac{1}{p_1'}}\frac{dt}{t},$$

и тем самым неравенство (5) доказано.

Теперь докажем точность утверждения 2.3.

(а) Рассмотрим функцию $F_1(x_1,x_2) = f_1(x_1)\sin x_2$, где

$$f_1(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx_1}{k^{\alpha_1+1}}, \quad \text{если} \quad \alpha_1 \neq 2l+1,\ l \in \mathbb{N};$$

$$f_1(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx_1}{k^{\alpha_1+1}}, \quad \text{если} \quad \alpha_1 = 2l+1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\xi(x_1)$ — функция положительная, слабо колеблющаяся на $(0,1)$ и такая, что

$$\xi(x_1) = \bar{\bar{o}}\left(\ln\frac{2}{x_1}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}$$

при $x_1 \to 0$. В [8, § 4.4] доказано, что

$$A_1(f_1,\delta) = \frac{\omega_{\alpha_1}(f_1,\delta)^{(1)}_\infty}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}(f_1,t)^{(1)}_{p_1}\xi(t)\frac{dt}{t}} \gg \frac{\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}}{\xi(\delta)}.$$

Так как

$$A_1(F_1,\delta) = \frac{\omega_{\alpha_1,0}(F_1,\delta)_{\infty,p_2}}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(F_1,t)_{p_1p_2}\xi(t)\frac{dt}{t}} = \frac{\omega_{\alpha_1}(f_1,\delta)^{(1)}_\infty}{\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}(f_1,t)^{(1)}_{p_1}\xi(t)\frac{dt}{t}} = A_1(f_1,\delta),$$

то $A_1(F_1,\delta) \gg \frac{\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}}{\xi(\delta)}$, откуда следует, что $A_1(F_1,\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$.

(б) Рассмотрим функцию $F_2(x_1,x_2)=f_2(x_1)\sin x_2$, где $f_2(x_1)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx_1}{k^{\alpha_1+1+\varepsilon}}$, $\alpha_1>0$, $\alpha_1+\varepsilon\neq 2l+1$, $l\in\mathbb{N}$. В [8, § 4.4] доказано, что

$$A_2(f_2,\delta)=\frac{\omega_{\alpha_1}(f_2,\delta)_{\infty}^{(1)}}{\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}+\varepsilon}(f_2,t)_{p_1}^{(1)}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}\frac{dt}{t}}\gg\frac{1}{\delta^{\varepsilon}\ln\frac{2}{\delta}}.$$

Так как $A_2(F_2,\delta)=A_2(f_2,\delta)$, то $A_2(F_2,\delta)\gg\frac{1}{\delta^{\varepsilon}\ln\frac{2}{\delta}}$, откуда следует, что $A_2(F_2,\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$.

Теперь покажем, что правые части неравенств (4) и (5) несравнимы при $\frac{\alpha_1}{2}<\gamma_1<\alpha_1$. Обозначим

$$B_1(F,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\frac{dt}{t},\quad B_2(F,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1},0}(f,t)_{p_1p_2}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}\frac{dt}{t}.$$

Рассмотрим функцию $F_3(x_1,x_2)=f_3(x_1)f_3(x_2)$, где $f_3(t)=\sin t$. В [8, § 4.4] доказано, что при $\frac{\alpha_1}{2}<\gamma_1<\alpha_1$ имеем $\frac{B_1(f_3,\delta)}{B_2(f_3,\delta)}\asymp\frac{1}{\delta^{\alpha_1-\gamma_1}\ln\frac{2}{\delta}}$, где

$$B_1(f_3,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}(f_3,t)_{p_1}^{(1)}\frac{dt}{t},\quad B_2(f_3,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}(f_3,t)_{p_1}^{(1)}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}\frac{dt}{t}.$$

Так как $B_1(F_3,\delta)=B_1(f_3,\delta)\|f_3\|_{p_2}^{(1)}$, $B_2(F_3,\delta)=B_2(f_3,\delta)\|f_3\|_{p_2}^{(1)}$, то

$$\frac{B_1(F_3,\delta)}{B_2(F_3,\delta)}\asymp\frac{1}{\delta_1^{\alpha_1-\gamma_1}\ln\frac{2}{\delta_1}},$$

откуда следует, что

$$\frac{B_1(F_3,\delta)}{B_2(F_3,\delta)}\to\infty\ \text{ при }\ \delta\to 0. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию $F_4(x_1,x_2)=f_4(x_1)f_3(x_2)$, где функция $f_4(t)$ такова, что

$$E_n(f_4)_{p_1}^{(1)}\asymp(n+1)^{-\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{p_1}}.$$

В [8, § 4.4] доказано, что при $\frac{\alpha_1}{2}<\gamma_1<\alpha_1$ имеем $\frac{B_1(f_4,\delta)}{B_2(f_4,\delta)}\asymp\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}$, где

$$B_1(f_4,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p_1}}(f_4,t)_{p_1}^{(1)}\frac{dt}{t},\quad B_2(f_4,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p_1}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p_1}}(f_4,t)_{p_1}^{(1)}\left(\ln\frac{2}{t}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}\frac{dt}{t}.$$

Так как $B_1(F_4,\delta)=B_1(f_4,\delta)\|f_3\|_{p_2}^{(1)}$, $B_2(F_4,\delta)=B_2(f_4,\delta)\|f_3\|_{p_2}^{(1)}$, то $\frac{B_2(F_4,\delta)}{B_1(F_4,\delta)}\asymp\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p_1}}$, откуда получаем, что

$$\frac{B_2(F_4,\delta)}{B_1(F_4,\delta)}\to\infty \text{ при } \delta\to 0. \tag{17}$$

Из справедливости соотношений (16) и (17) следует, что правые части неравенств (4) и (5) несравнимы.

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично теоремам 1 и 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–01–00457) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Оценки смешанных модулей гладкости в метриках L_q через смешанные модули гладкости в метрике L_1 // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 2. 12–26.
2. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Связь между смешанными модулями гладкости в метриках L_p и L_∞ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 3. 21–35.
3. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Связь между полными модулями гладкости в метриках L_1 и L_∞ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 16–24.
4. *Potapov M.K., Simonov B.V.* Analogues of Ulyanov inequalities for mixed moduli of smoothness // Methods of Fourier analysis and approximation theory. Applied and numerical harmonic analysis. Basel: Birkhäuser-Verlag, Switzerland, 2016. 161–179.
5. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
7. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Свойства частного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики. Тр. мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова. Т. X. Математика. Вып. 1. К 60-летию семинара “Тригонометрические и ортогональные ряды”. М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова, 2014. 58–71.
8. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Дробные модули гладкости: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2016.
9. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Изв. вузов. Математика. 2019. № 1. 1–14.
10. *Унинский А.П.* Неравенства в смешанной метрике для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени // Мат-лы Всесоюз. симп. по теоремам вложения. Баку, 1966. 212–213.
11. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Изд-во физ-мат. литературы, 1961.

Поступила в редакцию
09.01.2019

УДК 519.21

НОВЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ МАКСИМУМОВ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. В. Карпенко[1]

Изучаются двумерные максимумы признаков частиц в бессмертных ветвящихся процессах с непрерывным временем. Найдено предельное распределение для максимумов двух признаков в два момента времени. Получены предельные интенсивности скачков максимумов вверх и вниз совместно для обоих признаков или хотя бы для одного признака. В случае независимых признаков вычислены средние числа совместных скачков максимумов вверх и вниз за все время. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: многомерные распределения, экстремумы, копулы, ветвящиеся процессы.

Bivariate maxima of particle scores in immortal branching processes with continuous time are studied. The limit distribution for a maximum of two scores at two points in time is found. The limit intensities of the up and down jumps of the maximum for both scores or at least one score are obtained. In the case of independent scores, mean total numbers of joint maxima jumps up and down are calculated. Results are illustrated by examples.

Key words: multivariate distributions, extreme values, copulas, branching processes.

1. Введение. Интересным направлением междисциплинарных исследований на стыке теории экстремумов и теории ветвящихся процессов является изучение максимумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах (по поколениям или за все время). Отметим фундаментальные в этой

[1] *Карпенко Анна Валерьевна* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: karpenki9@yandex.ru.
Karpenko Anna Valer'evna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.