Соотношение (6) и известные свойства процесса $v_n(t)$ при локальных альтернативах (см. [4]) влекут следующую теорему.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия (iii), (iv). Пусть*

$$\delta(t) := \rho[H(G_0^{-1}(t)) - t],\ t \in [0,1],$$

*и функция $\delta(t)$ непрерывна. Тогда при $H_{1n}$ из* (5)

$$\hat{v}_n(t) = n^{1/2}[\hat{G}_n(G_0^{-1}(t)) - t] \xrightarrow{D} v(t) + \delta(t), \quad n \to \infty,$$

*где $v(t)$ — броуновский мост.*

Из теоремы 2 получаем

**Следствие 2.** *В условиях теоремы* 2 *справедлива сходимость по распределению*

$$\hat{D}_n \xrightarrow{d} \sup_t |v(t) + \delta(t)|, \quad \hat{\omega}_n^2 \xrightarrow{d} \int_0^1 [v(t) + \delta(t)]^2 dt, \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болдин М.В.* Оценка распределения возмущений в схеме авторегрессии // Теория вероятн. и ее примен. 1982. **27**, № 4. 905–910.
2. *Anderson T.V.* The statistical analysis of time series. N.Y.: J. Wiley and Sons Inc., 1971.
3. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. N.Y.: J. Wiley and Sons Inc., 1968.
4. *Чибисов Д.М.* К исследованию асимптотической мощности критериев согласия // Теория вероятн. и ее примен. 1965. **10**, № 3. 460–478.
5. *Boldin M.V., Petriev M.N.* On the empirical distribution function of residuals in autoregression with outliers and Pearson's chi-square type tests // Math. Methods Statist. 2018. **27**, N 4. 1–17.

Поступила в редакцию
13.03.2019

---

УДК 511

# СОХРАНЕНИЕ СВОЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА НОРМАЛЬНОСТИ ЗАМКНУТЫМИ map-МОРФИЗМАМИ

**М. Ю. Лисеев**[1]

Рассматриваются определения нормального, совершенно нормального, коллективно-нормального, наследственно нормального и паранормального отображений и теоремы о сохранении этих свойств замкнутыми map-морфизмами.

*Ключевые слова:* послойная топология, map-морфизм, нормальное отображение, коллективно-нормальное отображение, паранормальное отображение, наследственно нормальное отображение, совершенно нормальное отображение.

The paper contains definitions of normal, perfectly normal, collectionwise normal, hereditarily normal, paranormal mappings, and theorems on how these properties are preserved under closed map-morphisms.

*Key words:* fiberwise topology, map-morphism, normal mapping, collectionwise normal mapping, paranormal mapping, hereditarily normal mapping, perfectly normal mapping.

Под пространством понимается топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение пространств. Далее приводятся определения *отделимости окрестностями в*

[1] *Лисеев Михаил Юрьевич* — асп. каф. обшей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mathkurs2012@gmail.com.

*Liseev Mikhail Yur'evich* — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology ang Geometry.

*множестве*, $f$-*отделимости окрестностями*, *нормального отображения*, map-*морфизма*, взятые из [1, 2], и *замкнутого* map-*морфизма*.

**Определение 1.** Подмножества $A$, $B$ пространства $X$ называются *отделимыми окрестностями в подмножестве $X'$ пространства $X$*, если множества $A \cap X'$ и $B \cap X'$ имеют в $X'$ дизъюнктные окрестности.

**Определение 2.** Для отображения $f : X \to Y$ множества $A, B \subset X$ будем называть $f$-*отделимыми окрестностями*, если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью $\mathcal{O}y$, в прообразе $f^{-1}\mathcal{O}y$ которой множества $A$ и $B$ отделимы окрестностями.

**Определение 3.** Отображение $f : X \to Y$ *преднормально*, если любые два дизъюнктных замкнутых подмножества $A$ и $B$ пространства $X$ будут $f$-отделимы окрестностями. Отображение $f : X \to Y$ *нормально*, если для любой окрестности $\mathcal{O} \in \tau_Y$ отображение $f : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ преднормально, где $\tau_Y$ — топология на $Y$.

**Определение 4.** Пусть даны два отображения $f : X \to Z$ и $g : Y \to Z$. Отображение $F : X \to Y$ называется map-*морфизмом* $F : f \to g$, если $f = g \circ F$ (т.е. $F(f^{-1}z) \subset g^{-1}z$, $\forall z \in Z$).

**Определение 5.** Map-морфизм $F : f \to g$ отображения $f : X \to Z$ на отображение $g : Y \to Z$ называется *замкнутым* map-*морфизмом*, если отображение $F : X \to Y$ замкнуто.

Нам понадобится следующее утверждение (см., например, [3, теорема 1.4.12]).

**Лемма 1.** *Отображение $f : X \to Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого $B \subset Y$ и каждого открытого множества $A \subset X$, содержащего $f^{-1}(B)$, существует открытое множество $C \subset Y$, содержащее $B$ и такое, что $f^{-1}(C) \subset A$.*

Следующая теорема показыает, что, как и в случае пространств, свойство отображения быть нормальным сохраняется замкнутыми map-морфизмами.

**Теорема 1.** *Пусть отображение $f$ пространства $X$ на пространство $Z$ нормально, $g$ — отображение пространства $Y$ на пространство $Z$, а $F : f \to g$ — замкнутый* map-*морфизм. Тогда отображение $g$ нормально.*

**Доказательсто.** Пусть $\mathcal{O} \in \tau_z$, подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ замкнуты в $Y$ и дизъюнктны. Поскольку отображение $F$ непрерывно, то

$$X_1 = F^{-1}Y_1 \text{ и } X_2 = F^{-1}Y_2 \text{ замкнуты в } X \text{ и, кроме того, } X_1 \cap X_2 = \varnothing. \quad (1)$$

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathcal{O}$. Так как отображение $f$ нормально, то найдутся окрестность $\mathcal{O}z_0 \subset Z$ и окрестности $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O}z_0)$ множеств $f^{-1}(\mathcal{O}z_0) \cap X_1$ и $f^{-1}(\mathcal{O}z_0) \cap X_2$ соответственно, такие, что $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$ (отметим, что множества $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ открыты в $X$).

Из определения map-морфизма $F : f \to g$ следует, что

$$f = g \circ F \Rightarrow f^{-1}\mathcal{O}z_0 = (g \circ F)^{-1}\mathcal{O}z_0 = F^{-1}(g^{-1}\mathcal{O}z_0). \quad (2)$$

Рассмотрим множества $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ и $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$. Для них

$$F^{-1}(Y_i \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0) = (F^{-1}Y_i) \cap (F^{-1}g^{-1}\mathcal{O}z_0) = X_i \cap f^{-1}\mathcal{O}z_0 \subset \mathcal{O}_i, i = 1, 2.$$

Действительно, первое равенство очевидно (прообраз пересечения равен пересечению прообразов), второе же следует из (1) и (2).

Поскольку отображение $F$ замкнуто, то по лемме 1 для множества $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ и открытого множества $\mathcal{O}_1$, которое содержит $F^{-1}(Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0)$, найдется открытое в $Y$ множество $U_1$, содержащее $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ и такое, что $F^{-1}U_1 \subset \mathcal{O}_1$. И аналогично для множества $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ и открытого множества $\mathcal{O}_2$, которое содержит $F^{-1}(Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0)$, найдется открытое множество $U_2 \subset Y$, содержащее $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ и такое, что $F^{-1}U_2 \subset \mathcal{O}_2$.

Из того, что $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$, следует, что $F^{-1}U_1 \cap F^{-1}U_2 = \varnothing$. Значит, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Таким образом, для произвольно выбранной точки $z_0 \in \mathcal{O} \in \tau_z$ найдена окрестность $\mathcal{O}z_0 \subset Z$, такая, что в прообразе $g^{-1}\mathcal{O}z_0$ этой окрестности множества $Y_1 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ и $Y_2 \cap g^{-1}\mathcal{O}z_0$ отделимы окрестностями $U_1$ и $U_2$, т.е. множества $Y_1$ и $Y_2$ $g$-отделимы окрестностями и отображение $g$ нормально. □

Подобно тому, как было определено нормальное отображение, можно определить коллективно-нормальное [2] и паранормальное отображения.

**Определение 6.** Отображение $f : X \to Y$ пространства $X$ на пространство $Y$ называется *коллективно-преднормальным*, если для любой дискретной системы замкнутых в $X$ множеств $\{F_s\}_{s \in S}$ и любого $y \in Y$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$ точки $y$, что существует дизъюнктная система окрестностей $\{\mathcal{O}_s : \mathcal{O}_s \subset f^{-1}\mathcal{O}y\}_{s \in S}$ множеств $\{F_s \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{s \in S}$, т.е. семейство $\{F_s\}_{s \in S}$ отделимо окрестностями в $f^{-1}\mathcal{O}y$. Отображение $f : X \to Y$ *коллективно-нормально*, если для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ отображение $f : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ коллективно-преднормально.

**Определение 7.** Отображение $f : X \to Y$ пространства $X$ на пространство $Y$ называется *предпаранормальным*, если для любых точки $y \in Y$ и счетной дискретной системы замкнутых в $X$ множеств $\{F_n\}_{n<\omega}$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$ точки $y$, что система множеств $\{F_n \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{n<\omega}$ может быть расширена до локально конечной системы окрестностей $\{\mathcal{O}_n : \mathcal{O}_n \subset f^{-1}\mathcal{O}y\}_{n<\omega}$, т.е. $(F_n \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \subset \mathcal{O}_n$ и $(F_m \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \cap \mathcal{O}_n \neq \varnothing \Leftrightarrow (F_m \cap f^{-1}\mathcal{O}y) = (F_n \cap f^{-1}\mathcal{O}y)$. Отображение $f : X \to Y$ *паранормально*, если для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$ отображение $f : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ предпаранормально.

**Замечание.** Определения 6 и 7 являются обобщениями понятий коллективно-нормального и паранормального пространств (в смысле Никоша, см. [4]), убедиться в этом можно, рассмотрев случай, когда множество $Y$ одноточечное. Очевидно, всякое коллективно-нормальное отображение нормально. Таким образом, коллективная нормальность отображения является более сильным свойством, чем нормальность отображения. Также очевидно, что всякое нормальное отображение является паранормальным.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.

**Теорема 2.** *Пусть отображение $f$ пространства $X$ на пространство $Z$ коллективно-нормально (паранормально), $g$ — отображение пространства $Y$ на пространство $Z$, а $F : f \to g$ — замкнутый* map-*морфизм. Тогда отображение $g$ коллективно-нормально (паранормально).*

**Определение 8.** Нормальное отображение $f : X \to Z$ называется *совершенно нормальным отображением,* если для любого подмножества $X' \subset X$, открытого в $X$, и каждой точки $z_0 \in Z$ найдется окрестность $\mathcal{O}z_0 \subset Z$ этой точки, такая, что множество $f^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap X'$ имеет тип $F_\sigma$ в $X$.

**Теорема 3.** *Пусть отображение $f : X \to Z$ совершенно нормально, $g$ — отображение пространства $Y$ на пространство $Z$, а $F : f \to g$ — замкнутый* map-*морфизм. Тогда отображение $g$ совершенно нормально.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное множество $U \subset Y$, открытое в $Y$. Поскольку отображение $F$ непрерывно, его прообраз $F^{-1}U \subset X$ открыт в $X$. Но по условию теоремы отображение $f$ совершенно нормально, значит, для произвольной точки $z_0 \in Z$ найдется ее окрестность $\mathcal{O}z_0 \subset Z$, такая, что

$$f^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap F^{-1}U = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

где $C_i$ — замкнутые подмножества $X$, $i \in \mathbb{N}$. Теперь рассмотрим множество $g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U \subset Y$, учитывая предыдущее равенство и то, что $f^{-1}\mathcal{O}z_0 = F^{-1} \circ g^{-1}\mathcal{O}z_0$. Имеем следующие соотношения:

$$g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U = F \circ F^{-1}(g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U) = F(F^{-1}g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap F^{-1}U) =$$
$$= F(f^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap F^{-1}U) = F(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(C_i),$$

так как отображение $F$ замкнуто, подмножества $F(C_i)$ замкнуты в $Y$, $i \in \mathbb{N}$.

То есть для произвольного открытого в $Y$ множества $U$ и произвольно выбранной точки $z_0 \in Z$ нашлась ее окрестность $\mathcal{O}z_0 \subset Z$, такая, что множество $g^{-1}\mathcal{O}z_0 \cap U$ имеет тип $F_\sigma$, кроме того, из теоремы 1 следует, что отображение $g$ нормально. Таким образом, заключаем, что отображение $g$ совершенно нормально. □

Следующее определение приведено в [1].

**Определение 9.** Ограничение $f' = f : X' \to Z$ отображения $f : X \to Z$ на подмножество $X'$ пространства $X$ будем называть *подотображением отображения $f$*.

**Определение 10.** Нормальное отображение $f : X \to Z$ называется *наследственно нормальным*, если каждое его подотображение $f'$ является нормальным отображением.

Нам потребуется следующее утверждение [5, §1].

**Лемма 2.** *Если непрерывное отображение $f : X \to Y$ пространства $X$ в пространство $Y$ замкнуто, то для любого множества $B \subset Y$ отображение $f : f^{-1}B \to B$ также замкнуто.*

Эту лемму можно распространить со случая пространств на случай отображений.

**Лемма 3.** *Если непрерывный* map-*морфизм $F : f \to g$ отображения $f : X \to Z$ на отображение $g : Y \to Z$ замкнут, то для любого подотображения $g'$ отображения $g$* map-*морфизм $F : F^{-1}g' \to g'$ тоже замкнут.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное подотображение $g' = g|_{Y'} : Y' \to Z$ отображения $g$. Рассмотрим замкнутое в $F^{-1}Y'$ подмножество $M$, тогда в $X$ существует замкнутое множество $N$, в пересечении с $F^{-1}Y'$ дающее множество $M$, т.е. $M = F^{-1}Y' \cap N$. Поскольку множество $N$ замкнуто в $X$, а отображение $F$ замкнуто, получаем, что множество $F(N)$ замкнуто в $Y$. Следовательно, замкнуто в $Y'$ множество

$$Y' \cap F(N) = F(F^{-1}Y' \cap N) = F(M).$$

Таким образом, получили, что образ $F(M)$ замкнутого в $F^{-1}Y'$ множества $M$ замкнут в $Y'$, а это означает, что отображение $F : F^{-1}Y' \to Y'$ тоже замкнуто, и, так как $g' = g|_{Y'} : Y' \to Z$, получаем, что map-морфизм $F : F^{-1}g' \to g'$ замкнутый. □

**Теорема 4.** *Пусть отображение $f : X \to Z$ наследственно нормально, $g$ — отображение пространства $Y$ на пространство $Z$, а $F : f \to g$ — замкнутый* map-*морфизм. Тогда отображение $g$ наследственно нормально.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное подотображение $g' = g|_{Y'} : Y' \to Z$ отображения $g$. Тогда прообраз $F^{-1}Y' \subset X$ дает нам подотображение $f' : F^{-1}Y' \to Z$ отображения $f$.

По условию теоремы отображение $f$ наследственно нормально, значит, подотображение $f'$ нормально. По лемме 3 map-морфизм $F : (f' = F^{-1}g') \to g'$ тоже замкнутый. Тогда поскольку отображение $f'$ нормально, то по теореме 1 получаем, что и отображение $g'$ тоже нормально. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пасынков Б.А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. 72–102.
2. *Buhagiar D., Miwa T., Pasynkov B.A.* On metrizable type (MT-) maps and spaces // Topol. and its Appl. 1999. **96**, N 1. 31–51.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
4. *Nyikos P.* Problem Section. Problem B. 25 // Topol. Proc. 1984. **9**, N 2. 367.
5. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973

Поступила в редакцию
26.12.2018

---

УДК 531.382

# ЗАДАЧА МИНИМАКСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНИИ ВИЗИРОВАНИЯ

**В. В. Латонов**[1]

Приводится решение задачи минимаксной стабилизации линии визирования в окрестности программной траектории. Движение этой линии описывается системой линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. В задаче возмущения представлены в виде отклонений начального положения от нуля, а также в виде постояннодействующих возмущений. Стабилизация осуществляется посредством линейной обратной связи. Коэффициенты обратной связи вычислены как оптимальные при наихудших возможных возмущениях.

*Ключевые слова:* линия визирования, оптимизация, стабилизация, минимаксное управление, матричное уравнение.

The solution of the problem of minimax stabilization of the line of sight in the vicinity of the program trajectory is given. The motion of this line is described by a system of fourth-order linear differential equations. In the problem, perturbations are represented as deviations of the initial position from zero as well as constant perturbations. Stabilization is carried out

[1] *Латонов Василий Васильевич* — асп. каф. прикладной механики и управления мех-мат. ф-та МГУ, e-mail: WLatonov@gmail.com.

*Latonov Vasilii Vasil'evich* — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.