УДК 519.24

О ЛОКАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ТИПА КОЛМОГОРОВА И ОМЕГА-КВАДРАТ В АВТОРЕГРЕССИИ

М. В. Болдин[1]

Рассматривается $AR(p)$-модель с неизвестными параметрами и распределением инноваций. По остаткам от оценок параметров строится подобие эмпирической функции распределения. На этой функции основываются статистики типа Колмогорова и омега-квадрат для проверки гипотез относительно распределения инноваций. Найдена асимптотическая локальная мощность соответствующих тестов.

Ключевые слова: авторегрессия, остатки, эмпирическая функция распределения, тесты Колмогорова и омега-квадрат, локальные альтернативы.

A stationary $AR(p)$ model is considered. The autoregression parameters are unknown as well as the distribution of innovations. Based on the residuals from the parametric estimates, an analog of the empirical distribution function is defined and tests of Kolmogorov's and ω^2 type are constructed for testing hypotheses on the distribution of innovations. The asymptotic power of these tests under local alternatives is obtained.

Key words: autoregression, residuals, empirical distribution function, Kolmogorov's and omega-square tests, local alternatives.

1. Введение и постановка задачи. Эмпирическая функция распределения остатков и основанные на ней критерии согласия в линейных и нелинейных регрессионных моделях изучаются давно, имеется обширная библиография. В частности, в [1] рассматривалась стационарная $AR(p)$-модель

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_t\}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с неизвестной функцией распределения (ф.р.) $G(x)$; $\mathsf{E}\varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathsf{E}\varepsilon_1^2 < \infty$; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ — вектор неизвестных параметров, таких, что корни соответствующего (1) характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Пусть наблюдения $u_{1-p}, \ldots, u_n$ — выборка из стационарного решения $\{u_t\}$ уравнения (1), а $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{n}} = (\hat\beta_{1n}, \ldots, \hat\beta_{pn})^T$ — любая $n^{1/2}$-состоятельная оценка вектора $\boldsymbol{\beta}$, построенная по этим наблюдениям. Например, годится оценка наименьших квадратов (о.н.к.), поскольку она асимптотически нормальна при сделанных предположениях (см., например, [2, гл. 5]). Величины

$$\hat\varepsilon_t = u_t - \hat\beta_{1n} u_{t-1} - \ldots - \hat\beta_{pn} u_{t-p}, \, t = 1, \ldots, n,$$

называются отстатками, а функция

$$\hat G_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} I(\hat\varepsilon_t \leqslant x), \, x \in \mathbb{R}^1,$$

называется остаточной эмпирической функцией распределения (о.э.ф.р). Здесь и далее $I(\cdot)$ означает индикатор события. Функция $\hat G_n(x)$ есть подобие эмпирической функции распределения

$$G_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} I(\varepsilon_t \leqslant x)$$

ненаблюдаемых величин $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

[1] *Болдин Михаил Васильевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: boldin_m@hotmail.com.

Boldin Mikhail Vasil'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Probability.

В [1] показано: если $G(x)$ дважды дифференцируема с $g(x) = G'(x)$ и $\sup_x |g'(x)| < \infty$, то

$$\sup_x |n^{1/2}[\hat{G}_n(x) - G_n(x)]| \xrightarrow{P} 0, n \to \infty. \tag{2}$$

Утверждение (2) позволяет проверить гипотезу

$$H_0 : G(x) = G_0(x), \quad \text{функция } G_0(x) \text{ полностью известна},$$

критериями типа Колмогорова–Смирнова и омега-квадрат Крамера–Мизеса–Смирнова (далее кратко — критериями Колмогорова и омега-квадрат). А именно: пусть $G_0^{-1}(t)$, $t \in [0,1]$, — обратная к $G_0(t)$ функция, а

$$\hat{v}_n(t) = n^{1/2}[\hat{G}_n(G_0^{-1}(t)) - t]$$

— остаточный эмпирический процесс (о.э.п.). Это — аналог эмпирического процесса

$$v_n(t) = n^{1/2}[G_n(G_0^{-1}(t)) - t].$$

В силу (2) при H_0

$$\sup_t |\hat{v}_n(t) - v_n(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Из (3) и общеизвестных свойств $v_n(t)$ (см., например, [3, гл. 3]) получаем, что при H_0 процесс $\hat{v}_n(t)$ слабо сходится в пространстве Скорохода $D[0,1]$ к броуновскому мосту $v(t)$:

$$\hat{v}_n(t) \xrightarrow{D} v(t), \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Статистики типа Колмогорова и омега-квадрат для H_0 имеют вид

$$\hat{D}_n := \sup_t |\hat{v}_n(t)|, \quad \hat{\omega}_n^2 = \int_0^1 [\hat{v}_n(t)]^2 dt.$$

В силу (4) при H_0

$$P(\hat{D}_n \leqslant \lambda) \to P(\sup_t |v(t)| \leqslant \lambda) = K(\lambda),$$

$$P(\hat{\omega}_n^2 \leqslant \lambda) \to P(\int_0^1 [v(t)]^2 dt \leqslant \lambda) = S(\lambda), \quad n \to \infty,$$

где $K(\lambda)$ и $S(\lambda)$ — известные и табулированные функции распределения Колмогорова и Смирнова. Таким образом, статистики $\hat{D}_n$ и $\hat{\omega}_n^2$ можно применять для проверки H_0 при больших n так же, как обычные статистики, основанные на $v_n(t)$.

Упомянутые привлекательные факты были установлены только при гипотезе H_0, поведение о.э.п. и основанных на нем тестовых статистик при локальных альтернативах не рассматривалось. Мы устраним этот пробел.

Цель настоящей работы — установить слабый предел в $D[0,1]$ о.э.п. $\hat{v}_n(t)$ и основанных на нем статистик $\hat{D}_n$ и $\hat{\omega}_n^2$ при локальных альтернативах.

Далее в п. 2.2 предполагается, что $\{\varepsilon_t\}$ в (1) — н.о.р.с.в. с ф.р. в виде смеси

$$A_n(x) := (1 - \rho_n)G_0(x) + \rho_n H(x), \tag{5}$$

где

$$H(x) - \text{ф.р.}, \quad \rho_n = \min\{1, \frac{\rho}{\sqrt{n}}\}, \ \rho \geqslant 0.$$

Предположение (5) будем понимать как локальную альтернативную к H_0 гипотезу и обозначать H_{1n}. Разумеется, H_{1n} и H_0 совпадают при $\rho = 0$.

Результат об асимптотическом поведении $\hat{v}_n(t)$ и основанных на нем статистик $\hat{D}_n$ и $\hat{\omega}_n^2$ при H_{1n} приведен далее в теореме 2. Получить его удалось, доказав аналог соотношения (2) при H_{1n}. Этот результат представлен далее в теореме 1 и следствии 1 при предположениях относительно ф.р. инноваций существенно более общих, чем (5). Это позволяет рассматривать в дальнейшем альтернативы более общие, чем H_{1n}. Если бы $\{\varepsilon_t\}$ были наблюдаемы, то общий вид локальных к H_0 альтернатив был бы хорошо известен (см. [4]). В схеме (1) мы работаем с остатками и возникает необходимость иметь при альтернативе $n^{1/2}$-состоятельную оценку $\boldsymbol{\beta}$. В общей ситуации предъявить такую оценку непросто, но для альтернативы (5) такой оценкой оказывается простейшая о.н.к.

В настоящее время соотношения типа (2) (т.е. равномерные стохастические разложения о.э.ф.р.) установлены для различных авторегрессионных моделей: ARMA, взрывающейся и неустойчивой авторегрессии, $AR(\infty)$, ARCH, GARCH и для некоторых других (см. [5] и имеющуюся там библиографию). Значит, в этих моделях также можно проверять гипотезы о распределении инноваций тестами типа Колмогорова и омега-квадрат. Локальная мощность этих тестов не исследовалась. Настоящая работа открывает путь к подобному исследованию.

2. Основные результаты.

2.1. Стохастические разложения о.э.ф.р. Будем предполагать сначала, что с.в. $\{\varepsilon_t\}$ в (1) — н.о.р.с.в. с ф.р. $A_n(x)$. Эта функция распределения не обязательно удовлетворяет (5), к ней предъявляются лишь весьма общие требования. (В них, чтобы подчеркнуть зависимость от n, будем писать ε_{1n} вместо ε_1.)

Условие (i). $\mathsf{E}\varepsilon_{1n} = 0, \quad \sup_n \mathsf{E}\varepsilon_{1n}^2 < \infty$.

Условие (ii). Ф.р. $A_n(x)$ дважды дифференцируема, и $\sup_{n,x} |A_n^{(2)}(x)| < \infty$.

Аналогично остаткам $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ от оценки $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ из п. 1 введем остатки от неслучайного вектора $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^T \in \mathbb{R}^p$ соотношением

$$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) := u_t - \theta_1 u_{t-1} - \ldots - \theta_p u_{t-p},\ t = 1, \ldots, n.$$

Введем соответствующую о.э.ф.р.:

$$G_n(x, \boldsymbol{\theta}) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} I(\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) \leqslant x),\ x \in \mathbb{R}^1.$$

При $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta}$ функция $G_n(x, \boldsymbol{\beta})$ совпадает с эмпирической функцией распределения $G_n(x)$ величин $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Далее $|\cdot|$ означает евклидову норму вектора.

Теорема 1. *Пусть $\{\varepsilon_t\}$ — н.о.р.с.в. с ф.р. $A_n(x)$, удовлетворяющей условиям (i), (ii). Тогда при любых $0 \leqslant \Theta < \infty$ и $\delta > 0$*

$$\mathsf{P}(\sup_{x, |\boldsymbol{\tau}| \leqslant \Theta} |n^{1/2}[G_n(x, \boldsymbol{\beta} + n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}) - G_n(x)]| > \delta) \to 0,\ n \to \infty.$$

Идея доказательства теоремы 1 родственна идеям доказательства теоремы из [1] и теоремы 2.1 из [5].

Пусть $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ — оценка $\boldsymbol{\beta}$. Положим $\hat{G}_n(x) := G_n(x, \hat{\boldsymbol{\beta}}_n)$. Теорема 1 влечет

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ — $n^{1/2}$-состоятельная оценка $\boldsymbol{\beta}$. Тогда при любом $\delta > 0$*

$$\mathsf{P}(\sup_x |n^{1/2}[\hat{G}_n(x) - G_n(x)]| > \delta) \to 0,\ n \to \infty.$$

Доказательство следствия 1 стандартно (см., например, доказательство следствия 2.1 в [5]).

2.2. О.э.п. и тестовые статистики при локальных альтернативах. Обратимся теперь к альтернативе H_{1n} из (5). Будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие (iii). Случайные величины с функциями распределения $G_0(x)$ и $H(x)$ имеют нулевые средние и конечные дисперсии.

Условие (iv). Функции распределения $G_0(x)$ и $H(x)$ дважды дифференцируемы, их вторые производные ограничены.

При условиях (iii), (iv) ф.р. $A_n(x)$ из (5) удовлетворяет условиям (i), (ii).

Пусть $\hat{\boldsymbol{\beta}}_n$ — любая $n^{1/2}$-состоятельная при условиях (iii), (iv) оценка $\boldsymbol{\beta}$. Например, годится о.н.к., которая при единственном условии (iii) для невырожденной ф.р. $G_0(x)$ остается асимптотически гауссовской при H_{1n}, $n \to \infty$, с теми же параметрами, что и при H_0. Значит, в силу следствия 1 при H_{1n} получаем

$$\sup_t |\hat{v}_n(t) - v_n(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Соотношение (6) и известные свойства процесса $v_n(t)$ при локальных альтернативах (см. [4]) влекут следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (iii), (iv). Пусть*

$$\delta(t) := \rho[H(G_0^{-1}(t)) - t],\ t \in [0,1],$$

и функция $\delta(t)$ непрерывна. Тогда при H_{1n} из (5)

$$\hat{v}_n(t) = n^{1/2}[\hat{G}_n(G_0^{-1}(t)) - t] \xrightarrow{D} v(t) + \delta(t), \quad n \to \infty,$$

где $v(t)$ — броуновский мост.

Из теоремы 2 получаем

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *справедлива сходимость по распределению*

$$\hat{D}_n \xrightarrow{d} \sup_t |v(t) + \delta(t)|, \quad \hat{\omega}_n^2 \xrightarrow{d} \int_0^1 [v(t) + \delta(t)]^2 dt, \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болдин М.В.* Оценка распределения возмущений в схеме авторегрессии // Теория вероятн. и ее примен. 1982. **27**, № 4. 905–910.
2. *Anderson T.V.* The statistical analysis of time series. N.Y.: J. Wiley and Sons Inc., 1971.
3. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. N.Y.: J. Wiley and Sons Inc., 1968.
4. *Чибисов Д.М.* К исследованию асимптотической мощности критериев согласия // Теория вероятн. и ее примен. 1965. **10**, № 3. 460–478.
5. *Boldin M.V., Petriev M.N.* On the empirical distribution function of residuals in autoregression with outliers and Pearson's chi-square type tests // Math. Methods Statist. 2018. **27**, N 4. 1–17.

Поступила в редакцию
13.03.2019

УДК 511

СОХРАНЕНИЕ СВОЙСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА НОРМАЛЬНОСТИ ЗАМКНУТЫМИ map-МОРФИЗМАМИ

М. Ю. Лисеев[1]

Рассматриваются определения нормального, совершенно нормального, коллективно-нормального, наследственно нормального и паранормального отображений и теоремы о сохранении этих свойств замкнутыми map-морфизмами.

Ключевые слова: послойная топология, map-морфизм, нормальное отображение, коллективно-нормальное отображение, паранормальное отображение, наследственно нормальное отображение, совершенно нормальное отображение.

The paper contains definitions of normal, perfectly normal, collectionwise normal, hereditarily normal, paranormal mappings, and theorems on how these properties are preserved under closed map-morphisms.

Key words: fiberwise topology, map-morphism, normal mapping, collectionwise normal mapping, paranormal mapping, hereditarily normal mapping, perfectly normal mapping.

Под пространством понимается топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение пространств. Далее приводятся определения *отделимости окрестностями в*

[1] *Лисеев Михаил Юрьевич* — асп. каф. обшей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mathkurs2012@gmail.com.

Liseev Mikhail Yur'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology ang Geometry.