Автор выражает искреннюю признательность Р. М. Колпакову за постановку задачи и обсуждение результатов работы и О. С. Дудаковой за ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин В.А.* Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. 75–96.
2. *То Суан Зунг.* Об асимптотических закономерностях сложности автоматов из некоторых классов // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 22. 5–44.
3. *Орлов В.А.* О сложности реализации ограниченно-детерминированных операторов схемами в автоматных базисах // Проблемы кибернетики. 1973. Вып. 26. 141–182.
4. *Кибкало М.А.* Автоматная сложность булевых функций из классов Поста: Канд. дис. М., 2013.
5. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2006.
6. Конспект лекций О. Б. Лупанова по курсу "Введение в математическую логику" / Отв. ред. А. Б. Угольников. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.
7. *Сысоева Л.Н.* Максимальное число булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с двумя константными состояниями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 4. 12–17.
8. *Сысоева Л.Н.* Оценки числа булевых функций, реализуемых инициальным булевым автоматом с тремя константными состояниями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 2. 19–28.
9. *Сысоева Л.Н.* Квазиуниверсальные инициальные булевы автоматы с константными состояниями // Мат-лы XII Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения" имени академика О.Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.) / Под общ. ред. О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2016. 229–232.

Поступила в редакцию
31.10.2018

УДК 517.958:531.332

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КАРЛЕМАНА И ГОДУНОВА–СУЛТАНГАЗИНА

С. А. Духновский[1]

Исследуются одномерные системы уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина для двух и трех групп частиц соответственно. Данные системы являются частным случаем дискретного кинетического уравнения Больцмана. Приводятся теоремы существования глобального решения данных систем для возмущений в весовом пространстве Соболева, откуда следует экспоненциальная стабилизация к состоянию равновесия.

Ключевые слова: система Карлемана, система Годунова–Султангазина, теорема существования, асимптотическая устойчивость, число Кнудсена.

One-dimensional systems of Carleman and Godunov–Sultangazin are studied for two and three groups of particles, respectively. These systems are a special case of the discrete Boltzmann kinetic equation. Theorems on existence of global solution to these systems for perturbations in the weighted Sobolev space are presented. Thus, an exponential stabilization to the equilibrium state is obtained.

Key words: Carleman system, Godunov–Sultangazin system, existence theorem, asymptotic stability, Knudsen number.

[1] *Духновский Сергей Анатольевич* — преп. каф. прикладной математики НИУ МГСУ, e-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru.

Dukhnovsky Sergey Anatol'evich — Teacher, Moscow State University of Civil Engineering (MGSU), Department of Applied Mathematics.

1. Введение. Рассмотрим системы уравнений Карлемана [1–5]:

$$\begin{aligned}&\partial_t u + \partial_x u = -\tfrac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2), \quad x \in R,\ t > 0,\\ &\partial_t w - \partial_x w = \tfrac{1}{\varepsilon}(u^2 - w^2),\\ &u|_{t=0} = u^0,\ w|_{t=0} = w^0\end{aligned} \tag{1}$$

и Годунова–Султангазина [1, 6–9]:

$$\begin{aligned}&\partial_t u + \partial_x u = \tfrac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw), \quad x \in R,\ t > 0,\\ &\partial_t v = -\tfrac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw),\\ &\partial_t w - \partial_x w = \tfrac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw),\\ &u|_{t=0} = u^0,\ v|_{t=0} = v^0,\ w|_{t=0} = w^0.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $u = u(x,t), v = v(x,t), w = w(x,t)$ — плотности групп частиц, $0 < \varepsilon < 1$ — число Кнудсена из кинетической теории газа. Исследуем задачу Коши системы (1) для малых возмущений состояния равновесия $w_e^2 = u_e^2$, $u_e = w_e > 0$. Аналогично исследуется система Годунова–Султангазина (2) (см. [1, 7, 9]). Положим

$$u = u_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{u},\ w = w_e + w_e^{1/2}\varepsilon^2\widehat{w}.$$

Тогда

$$\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = -\varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}), \quad x \in R,\ t > 0, \tag{3}$$

$$\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} + 2w_e\frac{1}{\varepsilon}(\widehat{w} - \widehat{u}) = \varepsilon w_e^{1/2}(\widehat{u} + \widehat{w})(\widehat{u} - \widehat{w}), \tag{4}$$

$$\widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{w}|_{t=0} = \widehat{w}^0. \tag{5}$$

Аналогично получают в работах [7, 9] возмущенную систему для Годунова–Султангазина:

$$\begin{aligned}&\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - \frac{1}{\varepsilon}w_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = \varepsilon w_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big), \quad x \in R,\ t > 0,\\ &\partial_t\widehat{v} + \frac{2}{\varepsilon}v_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = -2\varepsilon v_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big),\\ &\partial_t\widehat{w} - \partial_x\widehat{w} - \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\Big(2v_e^{1/2}\widehat{v} - u_e^{1/2}\widehat{w} - w_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = \varepsilon u_e^{1/2}\Big(\widehat{v}^2 - \widehat{u}\widehat{w}\Big),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}^0,\ \widehat{v}|_{t=0} = \widehat{v}^0,\ \widehat{w}|_{t=0} = \widehat{w}^0. \tag{7}$$

Для периодических возмущений с нулевыми средними

$$\widehat{u}(t,x) = u_0(t) + \sum_{k\in Z_0} u_k(t)e^{ikx}, \quad \widehat{w}(t,x) = w_0(t) + \sum_{k\in Z_0} w_k(t)e^{ikx}, \qquad Z_0 = \{k \in Z, k \neq 0\},$$

введем весовое пространство Соболева $W^1_{2,\gamma}(R_+;\mathcal{H}_\sigma)$:

$$\|\widehat{u}\|_{W^1_{2,\gamma}(R_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \|\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+;\mathcal{H}_\sigma)} + \|\widehat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+;\mathcal{H}_\sigma)},$$

где

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \int_0^\infty e^{2\gamma t}|u_0(t)|^2\,dt +$$

$$+\int_0^\infty e^{2\gamma t}\sum_{k\in Z_0}|k|^{2\sigma}|u_k(t)|^2\,dt < \infty, \quad |||\widehat{u}|_{t=0}|||^2_{\mathcal{H}_\sigma} = |u_0^0|^2 + \sum_{k\in Z_0}|k|^{2\sigma}|u_k^0|^2.$$

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Для любых $u_e = w_e > 0$ существуют не зависящие от ε константы $\mu_1, q \in (0,1)$, такие, что для малых $0 < \varepsilon < 1$ и периодических начальных данных $(\widehat{u}^0, \widehat{w}^0)$ с нулевыми средними, для которых выполняется неравенство*

$$|||\widehat{u}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma} + |||\widehat{w}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma} \leqslant \varepsilon^2 q,$$

для любого $\sigma > 2$ существует единственное глобальное решение $(\widehat{u}, \widehat{w}) \in W^1_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$, где $\gamma = \varepsilon\mu_0 > 0, 0 < \mu_0 \leqslant \frac{(1-\mu_1^2)}{8w_e}$, задачи Коши (3), (4), (5).

Теорема 2. *Пусть $\sigma > 2$ и выполнены условия теоремы* 1. *Тогда состояние равновесия* ($u_e = \mathrm{const} > 0$, $w_e = \mathrm{const} > 0$, $u_e^2 = w_e^2$) *является асимптотически устойчивым:*

$$\lim_{t\to\infty} |||u(x,t) - u_e|||_{\mathcal{H}_\sigma} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} |||w(x,t) - w_e|||_{\mathcal{H}_\sigma} = 0.$$

Аналогично сформулируем теоремы для системы Годунова–Султангазина.

Теорема 3. *Для любых $v_e^2 = u_e w_e > 0$ существуют не зависящие от ε константы $\mu_0, q \in (0,1)$, такие, что для малых $0 < \varepsilon < 1$ и периодических начальных данных $(\widehat{u}^0, \widehat{v}^0, \widehat{w}^0)$ с нулевыми средними, для которых выполняется неравенство*

$$|||\widehat{u}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma} + |||\widehat{v}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma} + |||\widehat{w}^0|||_{\mathcal{H}_\sigma} \leqslant \varepsilon^{3/4} q,$$

для любого $\sigma > 2$ существует единственное глобальное решение $(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}) \in W^1_{2,\gamma}(R_+; \mathcal{H}_\sigma)$, где $\gamma = \varepsilon\mu_0 > 0$, задачи Коши (6), (7).

Теорема 4. *Пусть $\sigma > 2$ и выполнены условия теоремы* 3. *Тогда состояние равновесия* ($u_e = \mathrm{const} > 0$, $v_e = \mathrm{const} > 0$, $w_e = \mathrm{const} > 0$, $v_e^2 = u_e w_e$) *является асимптотически устойчивым:*

$$\lim_{t\to\infty} |||u(x,t) - u_e|||_{\mathcal{H}_\sigma} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} |||v(x,t) - v_e|||_{\mathcal{H}_\sigma} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} |||w(x,t) - w_e|||_{\mathcal{H}_\sigma} = 0.$$

Автор приносит благодарность В.В. Палину и Е.В. Радкевичу за полезные замечания и важные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С.К., Султангазин У.М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи матем. наук. 1971. **26**, № 3. 3–51.
2. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
3. *Васильева О.А., Духновский С.А.* Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестн. МГСУ. 2015. № 7. 33–40.
4. *Духновский С.А.* О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. **21**, № 1. 7–41.
5. *Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A.* Local equilibrium of the Carleman equation // J. Math. Sci. 2015. **207**, N 2. 296–323.
6. *Радкевич Е.В.* К проблеме несуществования диссипативной оценки для дискретных кинетических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. **30**, № 1. 106–143.
7. *Радкевич Е.В.* О дискретных кинетических уравнениях // Докл. РАН. 2012. **447**, № 4. 369–373.
8. *Васильева О.А.* Численное исследование системы уравнений Годунова–Султангазина. Периодический случай // Вестн. МГСУ. 2016. № 4. 27–35.
9. *Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A., Radkevich E.V.* On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations // J. Math. Sci. 2018. **235**, N 4. 393–453.

Поступила в редакцию
19.12.2018