СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольпин С.Г., Саитгареев А.Р., Смирнов Н.Н., Кравченко М.Н., Корнаева Д.А., Диева Н.Н.* Перспективы применения волновой технологии термогазохимического воздействия для повышения нефтеотдачи пластов // Нефтяное хозяйство. 2014. № 1. 62–66.
2. *Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М.* Термические методы повышения нефтеотдачи пластов / Пер. с франц. М.: Недра, 1989.
3. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей: Инженерные методы расчета / Пер. с польск. М.; Ташкент: Химия, 1966.
4. *Li K., Horne R.N.* Comparison of methods to calculate relative permeability from capillary pressure in consolidated water-wet porous media // Water Resources Res. 2006. N 42.
5. *Corey A.T.* The interrelation between gas and oil relative permeabilities // Prod. Mon. 1954. 38–41.
6. *Brooks R.H., Corey A.T.* Hydraulic properties of porous media // Hydrology Papers. 1964. N 3.
7. *Smirnov N.N., Nikitin V.F.* Modeling and simulation of hydrogen combustion in engines // Int. J. Hydrogen Energy. 2014. **39**, N 2. 1122–1136.

Поступила в редакцию
16.05.2018

УДК 514.86 : [531.1/3 : 539.3]

ОБ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА ДЛЯ ПОДСИСТЕМ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Г. Л. Бровко[1]

В рамках классической механики сплошной среды в предположении, что некоторая система отсчета является инерциальной для некоторой совокупности движущихся и взаимодействующих тел (большой системы), получены необходимые и достаточные условия существования инерциальной системы отсчета для подсистемы этих тел, рассматриваемой как самостоятельная большая система. Указано движение такой системы отсчета (с точностью до галилеевых преобразований) относительно старой системы отсчета.

Ключевые слова: классическая механика сплошной среды, большая система тел, подсистема, инерциальная система отсчета.

In the framework of classical continuum mechanics, for the frame of reference being inertial for a certain system of moving and interacting bodies (a large system) the necessary and sufficient conditions are formulated for the existence of an inertial frame of reference for the subsystem of the bodies considered as an independent large system. The motion of such a reference frame relative to the old reference frame (with the accuracy up to the Galilean transformations) is specified.

Key words: classical continuum mechanics, large system of bodies, subsystem, inertial frame of reference.

Введение. В классической механике сплошной среды в качестве основных законов наряду с законом сохранения массы принимаются законы движения Коши–Эйлера, выражающие баланс количества и момента количества движения в инерциальной системе отсчета [1, 2]. В соответствии с первым законом Ньютона существование инерциальной системы отсчета постулируется [3], однако вопрос о том, какие системы отсчета, в каких пределах и с какой точностью можно рассматривать как инерциальные, подробно не рассматривается. Между тем практически важно уметь оценить, является ли та или иная система отсчета инерциальной по отношению к выделенной системе тел (их движениям и взаимодействиям).

[1] *Бровко Георгий Леонидович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: glb@mech.math.msu.su.

Brovko Georgii Leonidovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechnaics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.

В настоящей работе в рамках классической механики сплошной среды в предположении, что некоторая система отсчета является инерциальной для некоторой совокупности движущихся и взаимодействующих тел (большой системы), получены необходимые и достаточные условия существования инерциальной системы отсчета для подсистемы этих тел, рассматриваемой как самостоятельная большая система. Указано движение такой системы отсчета (с точностью до галилеевых преобразований) относительно старой системы отсчета.

При этом под инерциальной системой отсчета для некоторой совокупности тел (называемой большой системой) понимается такая система отсчета, в которой движения тел большой системы и их взаимодействия между собой (называемые здесь активными силами) регулируются классическими ньютоновыми законами баланса количества движения и момента количества движения, выражаемыми для рассматриваемых здесь деформируемых тел известными интегральными законами движения Коши–Эйлера или эквивалентными им уравнениями движения Коши для сплошной среды [1–3].

1. Уравнения движения тел большой системы в инерциальной системе отсчета. Пусть для некоторой совокупности $\mathfrak{U}$ движущихся и взаимодействующих тел на некотором временном промежутке существует инерциальная система отсчета ϕ. Назовем $\mathfrak{U}$ большой системой, а силы взаимодействия ее тел (подтел) друг с другом — *активными*. Тогда в этой системе отсчета в произвольный момент времени (из указанного промежутка) для любого тела $\mathcal{B}$ из $\mathfrak{U}$ уравнения движения Коши–Эйлера имеют вид [1–3]

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{g}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}, \qquad \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} = \mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ — количество движения тела $\mathcal{B}$; $\mathbf{q}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0}$ — момент количества движения относительно точки $\boldsymbol{x}_0$ (неподвижной в системе отсчета ϕ); $\mathbf{g}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}$ и $\mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0}$ — векторы активных сил и момента сил (относительно точки $\boldsymbol{x}_0$), внешних по отношению к телу $\mathcal{B}$, т.е. воздействующих на тело $\mathcal{B}$ со стороны всех остальных тел большой системы $\mathfrak{U}$ (со стороны дополнения $\mathcal{B}^{\mathrm{e}}$ тела $\mathcal{B}$ до соединения Σ всех тел большой системы $\mathfrak{U}$). Эти величины выражаются через интегралы по области $\Omega_{\mathcal{B}}$ актуальной конфигурации тела $\mathcal{B}$ и по ее границе $\Gamma_{\mathcal{B}} = \partial\Omega_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} &\equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{v}\, dV, & \mathbf{g}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} &\equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\, dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}}} \mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\, dS, \\ \mathbf{q}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} &\equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{v}\, dV, & \mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} &\equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\, dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}}} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\, dS, \end{aligned} \tag{2}$$

где ρ — плотность массы тела по отношению к объему V в актуальной конфигурации; $\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{v}$ — положение и скорость точки тела; $\mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}$ — плотность активных внешних для тела $\mathcal{B}$ массовых сил по отношению к массе; $\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}$ — плотность активных внешних поверхностных (контактных) сил по отношению к площади S поверхности тела в актуальной конфигурации; символом $\times$ обозначено векторное умножение.

Сделаем два важных обобщающих замечания.

Замечание 1. Обычно в классических построениях механики сплошной среды [1–3], в конкретных задачах поля внутренних массовых взаимодействий в теле считаются заданными, чаще всего нулевыми (тривиальными), что сводит рассмотрение лишь к внешним массовым силам. Мы здесь не будем прибегать к такому упрощению, допуская наличие в каждом теле $\mathcal{B} \in \mathfrak{U}$ нетривиального поля плотностей $\mathbf{b}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}}$ внутренних (для тела $\mathcal{B}$) массовых сил.

Тогда, учитывая результирующие силы [3] и вспоминая, что в соответствии с третьим законом Ньютона о действии и противодействии результирующая сила аддитивна на отделенных телах и является собою векторную меру на подтелах любого тела $\mathcal{B}$, можно показать, что суммарные (интегральные) сила и момент, создаваемые в каждом теле полем $\mathbf{b}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}}$ его внутренних массовых взаимодействий, равны нулю (т.е. сила и момент “самовоздействия” любого тела суть нулевые векторы):

$$\mathbf{g}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}} \equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{b}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}}\, dV = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{m}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} \equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{b}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}}\, dV = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Это позволяет уравнения (1) для любого тела представить в суммарном виде:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}}, \qquad \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} = \mathbf{m}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0}, \tag{4}$$

где подразумеваются обозначения

$$\mathbf{g}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{g}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} + \mathbf{g}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}}, \qquad \mathbf{m}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} \equiv \mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0} + \mathbf{m}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}\boldsymbol{x}_0}, \qquad \mathbf{b}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} + \mathbf{b}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{B}} \tag{5}$$

для суммарных активных (внешних и внутренних) сил, моментов сил, а также для плотностей массовых сил соответственно.

Более того, равенства (4) справедливы, в частности, и для соединенного тела Σ большой системы $\mathfrak{U}$, не испытывающего активных внешних воздействий:

$$\mathbf{g}_{\Sigma} \equiv \mathbf{g}^{\mathrm{i}}_{\Sigma}, \quad \mathbf{m}_{\Sigma\boldsymbol{x}_0} \equiv \mathbf{m}^{\mathrm{i}}_{\Sigma\boldsymbol{x}_0}, \quad \mathbf{b}_{\Sigma} \equiv \mathbf{b}^{\mathrm{i}}_{\Sigma} \quad (\mathbf{g}^{\mathrm{e}}_{\Sigma} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}^{\mathrm{e}}_{\Sigma\boldsymbol{x}_0} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\Sigma} \equiv \mathbf{0}). \tag{6}$$

А поскольку для произвольного тела $\mathcal{B}$ на его подтелах плотности $\mathbf{b}_{\mathcal{B}}$ и $\mathbf{b}_{\Sigma}$ определяют одну и ту же векторную меру — массовую силу воздействия на эти подтела со стороны их дополнений в рамках большой системы $\mathfrak{U}$, а тем самым универсально на Σ [4, 5], то имеем

$$\mathbf{b}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{b}_{\Sigma} \quad \forall \mathcal{B} \in \mathfrak{U}, \tag{7}$$

т.е. суммарные поля активных внешних и внутренних массовых воздействий не зависят от выбора тела $\mathcal{B}$ в рамках большой системы $\mathfrak{U}$, а определяются лишь этой системой (ее соединенным телом Σ).

В свою очередь плотности активных внешних поверхностных воздействий $\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}$ на каждое тело $\mathcal{B}$ большой системы определяются полем тензора напряжений Коши $\mathbf{S}$ в этом теле, а значит, и в соединенном теле Σ (поле $\mathbf{S}$ в Σ не зависит от того, какое тело $\mathcal{B}$ мы рассматриваем) по известной формуле теории напряжений [1–5]:

$$\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \tag{8}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\Gamma_{\mathcal{B}} = \partial\Omega_{\mathcal{B}}$ актуальной конфигурации тела.

Соотношения (7) с учетом (5), (6), а также (2), (3) позволяют переписать интегральные уравнения движения (4) для произвольного тела $\mathcal{B}$ из $\mathfrak{U}$ в виде

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{v}\,dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{b}_{\Sigma}\,dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}}} \mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\,dS, \\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{v}\,dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{b}_{\Sigma}\,dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}}} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\,dS, \end{gathered} \tag{9}$$

или с учетом тождеств (справедливых для любого постоянного $\boldsymbol{x}_0$)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{v}\,dV \equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{w}\,dV, \qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{v}\,dV \equiv \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{w}\,dV$$

в эквивалентном виде:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{w}\,dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho\mathbf{b}_{\Sigma}\,dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}}} \mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\,dS, \\ \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{w}\,dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{b}_{\Sigma}\,dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}}} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}}\,dS, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\mathbf{w}$ — ускорение точки тела.

На основании (7), (8) с использованием формулы Гаусса–Остроградского в силу произвольности тела $\mathcal{B}$ уравнения (9), (10) эквивалентно приводятся к известным локальным уравнениям движения Коши и граничному условию:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\mathbf{S} + \rho\mathbf{b}_{\Sigma} = \rho\mathbf{w}, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \qquad (\boldsymbol{x} \in \Omega_{\Sigma}), \\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} \qquad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathcal{B}}), \end{gathered} \tag{11}$$

где div — оператор дивергенции по пространственной переменной $\boldsymbol{x}$ актуальной конфигурации тела, верхний индекс $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование тензора.

Подчеркнем, что хотя соотношения (9)–(11) по виду совпадают с известными аналогичными соотношениями классических построений [1–3], здесь в качестве $\mathbf{b}_\Sigma$ фигурирует не внешняя по отношению к какому-либо телу $\mathcal{B}$, а суммарная плотность внешних и внутренних активных массовых сил, не зависящая от выделения того или иного тела $\mathcal{B}$.

Замечание 2. Второе из интегральных уравнений движения — уравнение баланса момента количества движения — выполнено для любого переменного во времени центра приведения $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t)$. Действительно, пользуясь для второго уравнения системы (10) формулами пересчета [3] момента количества движения и моментов сил относительно нового (переменного во времени) центра приведения и используя первую формулу (10), можно показать, что при любом переменном центре приведения $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t)$ второе уравнение (10) эквивалентно выражает условие баланса момента количества движения, установленное ранее для неподвижного $\boldsymbol{x}_0$ в обеих формах вторых уравнений систем (9) и (10).

Напомним, что все формулы настоящего пункта получены и написаны для системы отсчета ϕ, являющейся инерциальной для большой системы тел $\mathfrak{U}$.

2. Уравнения движения для тел подсистемы в произвольной системе отсчета. Рассмотрим произвольную подсистему $\mathfrak{U}'$ тел большой системы $\mathfrak{U}$. Соединенное тело подсистемы $\mathfrak{U}'$ обозначим через Σ' и активные (внешние, внутренние и суммарные) силы взаимодействия тел в рамках $\mathfrak{U}'$ будем помечать верхним штрихом, сохраняя в остальном смысл обозначений п. 1. Плотность массовых сил воздействия на тело $\mathcal{B}'$ подсистемы $\mathfrak{U}'$ со стороны остальных тел большой системы $\mathfrak{U}$, не входящих в $\mathfrak{U}'$, обозначим через $\mathbf{b}''_{\mathcal{B}'}$, а плотность таких же поверхностных сил — через $\mathbf{t}''_{\mathcal{B}'}$. Заметим, что $\mathbf{t}''_{\mathcal{B}'}$ зависит как от выбора большой системы $\mathfrak{U}$ и подсистемы $\mathfrak{U}'$, так и от выбора конкретного тела $\mathcal{B}'$; в то же время для всех $\mathcal{B}'$ из $\mathfrak{U}'$ выполнено $\mathbf{b}''_{\mathcal{B}'} \equiv \mathbf{b}''_{\Sigma'}$ и поле $\mathbf{b}''_{\Sigma'}$ определяется лишь системой $\mathfrak{U}$ и подсистемой $\mathfrak{U}'$.

Тогда в старой (инерциальной для $\mathfrak{U}$) системе отсчета ϕ уравнения движения (10) для произвольного тела $\mathcal{B}'$ примут вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho\mathbf{w}\,dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho(\mathbf{b}'_{\Sigma'} + \mathbf{b}''_{\Sigma'})\,dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}'}} (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'} + \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'})\,dS,\\ \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\mathbf{w}\,dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'}} \rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times(\mathbf{b}'_{\Sigma'} + \mathbf{b}''_{\Sigma'})\,dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}'}} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times(\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'} + \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'})\,dS,\end{gathered} \tag{12}$$

т.е. в локальной записи подобно (11) — вид

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{S} + \rho(\mathbf{b}'_{\Sigma'} + \mathbf{b}''_{\Sigma'}) = \rho\mathbf{w}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega_{\Sigma'}),\\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'} + \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'}) \quad (\boldsymbol{x}\in\Gamma_{\mathcal{B}'}),\end{gathered} \tag{13}$$

причем центр приведения $\boldsymbol{x}_0$ в (12) — произвольная константа или функция времени.

Рассмотрим уравнения (12), (13) для подсистемы $\mathfrak{U}'$ в произвольной новой (не обязательно инерциальной) системе отсчета ϕ_*. Переход от ϕ к ϕ_* характеризуется заменой [3] независимых эйлеровых переменных $(\boldsymbol{x}, t)$ на $(\boldsymbol{x}_*, t_*)$ по формулам

$$\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_{0*} + \boldsymbol{\mathcal{Q}}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \qquad t_* = t + a, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{x}_{0*} \equiv \boldsymbol{x}_{0*}(t)$ — новый центр приведения; $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \equiv \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)$ — ортогональный оператор (тензор “поворота” старой системы отсчета относительно новой); $\boldsymbol{x}_0$ — произвольное место в старой системе отсчета (выбранное, например, для простоты таким же, как в уравнениях (12)), без ущерба для общности формул (14) $\boldsymbol{x}_0$ можно считать константой; a — произвольная константа размерности времени.

При этом преобразование скоростей и ускорений выражается известными [4–6] формулами сложения движений (Эйлера, Ривальса, Кориолиса):

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_{*\mathrm{e}} + \mathbf{v}_{*\mathrm{r}}, \quad \mathbf{v}_{*\mathrm{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{0}*} + \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\cdot\mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_{*\mathrm{r}} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}\cdot\mathbf{v},\\ \mathbf{v}_{*\mathrm{e}} = \mathbf{v}_{*\mathrm{tr}} + \mathbf{v}_{*\mathrm{rot}}, \quad \mathbf{v}_{*\mathrm{tr}} = \dot{x}_{0*}, \quad \mathbf{v}_{*\mathrm{rot}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\cdot\mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_* \equiv \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_*,\\ \mathbf{w}_* = \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{r}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{c}}, \quad \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} = \ddot{x}_{0*} + \ddot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\cdot\mathbf{r}, \quad \mathbf{w}_{*\mathrm{r}} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}\cdot\mathbf{w},\\ \mathbf{w}_{*\mathrm{c}} = 2\dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}\cdot\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{v}_{*\mathrm{r}} \equiv 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{*\mathrm{r}}, \quad \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} = \mathbf{w}_{*\mathrm{tr}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{rot}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{ax}},\\ \mathbf{w}_{*\mathrm{tr}} = \ddot{x}_{0*}, \quad \mathbf{w}_{*\mathrm{rot}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathbf{r}_* \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_*, \quad \mathbf{w}_{*\mathrm{ax}} = \boldsymbol{\Omega}^2\cdot\mathbf{r}_* \equiv \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_*)\,.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, $\mathbf{r}_* = \boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}$ ($\mathbf{r}_* = \boldsymbol{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{r}$) — радиусы-векторы места $\boldsymbol{x}$ и физически того же места $\boldsymbol{x}_*$ точки тела в момент времени t и в физически тот же момент времени t_* относительно центров приведения $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_{0*}$ соответственно в старой и новой системах отсчета; кроме того, для указанного сложения движений через $\mathbf{v}_{*\mathrm{e}}$, $\mathbf{v}_{*\mathrm{r}}$ обозначены переносная и относительная скорости, через $\mathbf{w}_{*\mathrm{e}}$, $\mathbf{w}_{*\mathrm{r}}$, $\mathbf{w}_{*\mathrm{c}}$ — переносное, относительное и кориолисово ускорения. Для переносного движения старой системы отсчета относительно новой через $\mathbf{v}_{*\mathrm{tr}}$, $\mathbf{v}_{*\mathrm{rot}}$ обозначены поступательная и вращательная составляющие переносной скорости, через $\mathbf{w}_{*\mathrm{tr}}$, $\mathbf{w}_{*\mathrm{rot}}$, $\mathbf{w}_{*\mathrm{ax}}$ — поступательная, вращательная и осестремительная составляющие переносного ускорения. Наконец, через $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ обозначены антисимметричный ($\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\Omega}$) тензор и его коаксиальный вектор (характеризующие мгновенную скорость вращения старой системы отсчета относительно новой), определяемые равенствами

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{coax} \boldsymbol{\Omega} \equiv -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\Omega},$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ —тензор Леви-Чивиты.

При замене системы отсчета (14) область $\Omega_{\mathcal{B}'}$ актуальной конфигурации тела $\mathcal{B}'$ с границей $\Gamma_{\mathcal{B}'}$ переходит конгруэнтно в область $\Omega_{\mathcal{B}'*}$ с границей $\Gamma_{\mathcal{B}'*}$, а другие величины преобразуются по формулам

$$\begin{gathered} \rho_* = \rho, \quad \mathbf{b}_* = \boldsymbol{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{t}_* = \boldsymbol{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_* = \boldsymbol{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{S}_* = \boldsymbol{\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{div}_* \mathbf{S}_* = \boldsymbol{\mathcal{Q}} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S}, \end{gathered} \tag{16}$$

где под $\mathbf{b}$ и $\mathbf{t}$ понимаются плотности любых указанных выше массовых и поверхностных сил, а $\mathbf{n}$ — нормаль к $\Gamma_{\mathcal{B}'}$.

С учетом (14)–(16) и замечания 2 уравнения движения (12), (13) можно переписать в новой системе отсчета ϕ_* в аналогичном виде:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho \mathbf{w}_{*\mathrm{r}}\, dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho(\mathbf{b}'_{\Sigma'*} + \mathbf{b}''_{\Sigma'*})\, dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}'*}} (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'*} + \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*})\, dS, \\ \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho(\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \times \mathbf{w}_{*\mathrm{r}}\, dV = \\ = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho(\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \times (\mathbf{b}'_{\Sigma'*} + \mathbf{b}''_{\Sigma'*})\, dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}'*}} (\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \times (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'*} + \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*})\, dS \end{gathered} \tag{17}$$

и соответственно

$$\begin{gathered} \operatorname{div}_* \mathbf{S}_* + \rho(\mathbf{b}'_{\Sigma'*} + \mathbf{b}''_{\Sigma'*}) = \rho \mathbf{w}_{*\mathrm{r}}, \quad \mathbf{S}_* = \mathbf{S}_*^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{x}_* \in \Omega_{\Sigma'*}), \\ \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{n}_* = (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'*} + \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*}) \quad (\boldsymbol{x}_* \in \Gamma_{\mathcal{B}'*}). \end{gathered} \tag{18}$$

3. Основная теорема. Учитывая инерциальность системы отсчета ϕ для большой системы тел $\mathfrak{U}$, зададимся вопросом, в каком случае и какую из систем отсчета ϕ_* можно считать инерциальной для подсистемы тел $\mathfrak{U}'$, рассматриваемой как самостоятельная большая система.

Выражая $\mathbf{w}_{*\mathrm{r}}$ из (15), представим уравнения (17), (18) в виде

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho \mathbf{w}_*\, dV = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho(\mathbf{b}'_{\Sigma'*} + \underline{\mathbf{b}''_{\Sigma'*} + \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{c}}})\, dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}'*}} (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'*} + \underline{\mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*}})\, dS, \\ \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho(\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \times \mathbf{w}_*\, dV = \\ = \int\limits_{\Omega_{\mathcal{B}'*}} \rho(\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \times (\mathbf{b}'_{\Sigma'*} + \underline{\mathbf{b}''_{\Sigma'*} + \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{c}}})\, dV + \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{B}'*}} (\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \times (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'*} + \underline{\mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*}})\, dS \end{gathered} \tag{19}$$

и соответственно

$$\begin{gathered} \operatorname{div}_* \mathbf{S}_* + \rho(\mathbf{b}'_{\Sigma'*} + \underline{\mathbf{b}''_{\Sigma'*} + \mathbf{w}_{*\mathrm{e}} + \mathbf{w}_{*\mathrm{c}}}) = \rho \mathbf{w}_*, \quad \mathbf{S}_* = \mathbf{S}_*^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{x}_* \in \Omega_{\Sigma'*}), \\ \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{n}_* = (\mathbf{t}'^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}'*} + \underline{\mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*}}) \quad (\boldsymbol{x}_* \in \Gamma_{\mathcal{B}'*}). \end{gathered} \tag{20}$$

Нетрудно заметить, что новая система отсчета ϕ_* является инерциальной для подсистемы движущихся и взаимодействующих тел $\mathfrak{U}'$ в том и только в том случае, когда уравнения (19), (20) для $\mathfrak{U}'$ имеют вид, вполне аналогичный уравнениям (10), (11) для $\mathfrak{U}$, т.е. когда они содержат силовые поля лишь активных для подсистемы $\mathfrak{U}'$ взаимодействий. Это выполнено в точности тогда, когда подчеркнутые члены в уравнениях (19), (20) вносят нулевой вклад, т.е. когда для происходящих в подсистеме $\mathfrak{U}'$ движений выполнены условия

$$\mathbf{b}''_{\Sigma'*} = -\mathbf{w}_{*\mathrm{e}} - \mathbf{w}_{*\mathrm{c}} \quad (\boldsymbol{x}_* \in \Omega_{\Sigma'*}), \quad \mathbf{t}''_{\mathcal{B}'*} = 0 \quad (\boldsymbol{x}_* \in \Gamma_{\mathcal{B}'*}). \tag{21}$$

Второе из условий (21) в точности означает, что контактные воздействия на любые тела $\mathcal{B}'$ из $\mathfrak{U}'$ со стороны тел большой системы $\mathfrak{U}$, не входящих в $\mathfrak{U}'$, отсутствуют, иными словами, подсистема $\mathfrak{U}'$ не имеет силовых контактов с остальными телами большой системы $\mathfrak{U}$.

Первое из условий (21) означает, что поле $\mathbf{b}''_{\Sigma'*}$ массовых сил воздействия со стороны дополнения к $\mathfrak{U}'$ до $\mathfrak{U}$ на тела $\mathcal{B}'$ (на соединенное тело Σ') подсистемы $\mathfrak{U}'$ детально согласовано с данным движением тел подсистемы $\mathfrak{U}'$ (с движением ее соединенного тела Σ'), а именно, как показывают формулы (15), выполнено равенство

$$\mathbf{b}''_{\Sigma'*} = -\ddot{\boldsymbol{x}}_{0*} - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v}_* - \dot{\boldsymbol{x}}_{0*}) - (\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\Omega}^2) \cdot (\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_{0*}) \tag{22}$$

для любой точки $\boldsymbol{x}_*$ области $\Omega_{\Sigma'*}$ актуальной конфигурации соединенного тела Σ' подсистемы $\mathfrak{U}'$ в системе отсчета ϕ_*. Заметим, что первое и третье слагаемые в правой части (22) определяют некоторое линейное по $\boldsymbol{x}_*$ поле, а второе слагаемое, линейное относительно поля скоростей $\mathbf{v}_*$, вообще говоря, нелинейно по $\boldsymbol{x}_*$.

Не задаваясь детальным выяснением условий выполнения равенства (22), потребуем его универсального выполнения для произвольных движений тел подсистемы $\mathfrak{U}'$, т.е. для произвольных размещений $\boldsymbol{x}_*$ точек тел и произвольного поля их скоростей $\mathbf{v}_*$ в системе отсчета ϕ_*. Как видно из (22), это имеет место в точности тогда, когда

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{Q}} \equiv \mathrm{const}, \tag{23}$$

т.е. в силу (14) тогда и только тогда, когда старая система отсчета ϕ движется относительно новой системы отсчета ϕ_* поступательно с ускорением $\ddot{\boldsymbol{x}}_{0*}$, а тем самым с точки зрения старой системы отсчета новая система отсчета движется относительно старой также поступательно с ускорением $-\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_{0*}$. При этом с необходимостью из (22) имеем

$$\mathbf{b}''_{\Sigma'*} = -\ddot{\boldsymbol{x}}_{0*}, \tag{24}$$

т.е. $\mathbf{b}''_{\Sigma'*}$ — однородное (возможно, зависящее от времени) поле массовых сил в $\Omega_{\Sigma'*}$, а между тем и в старой системе отсчета ϕ это поле, принимающее значения $\mathbf{b}''_{\Sigma'} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}''_{\Sigma'*} = -\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_{0*}$ (причем $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \equiv \mathrm{const}$), также однородно в $\Omega_{\Sigma'}$ и притом совпадает с ускорением новой системы отсчета относительно старой (с точки зрения старой).

Применяя первое уравнение (1) с учетом (2) к соединенному телу Σ' подсистемы $\mathfrak{U}'$, т.е. полагая $\mathcal{B} = \Sigma'$, и замечая, что в этом случае $\mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{b}^{\mathrm{e}}_{\Sigma'} \equiv \mathbf{b}''_{\Sigma'}$, $\mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\mathcal{B}} \equiv \mathbf{t}^{\mathrm{e}}_{\Sigma'} \equiv \mathbf{t}''_{\Sigma'}$, на основании (21)–(24) с использованием теоремы о движении центра масс [1–6] получаем, что функция времени $\mathbf{b}''_{\Sigma'}$ и есть ускорение центра масс соединенного тела Σ' подсистемы $\mathfrak{U}'$ в старой системе отсчета ϕ.

Таким образом, в рассматриваемом здесь случае с необходимостью получаем, что с точки зрения старой системы отсчета ϕ (инерциальной для всей большой системы тел $\mathfrak{U}$) новая система отсчета ϕ_* (инерциальная для подсистемы тел $\mathfrak{U}'$) движется относительно старой поступательно с ускорением центра масс соединенного тела Σ' подсистемы $\mathfrak{U}'$, равным $\mathbf{b}''_{\Sigma'}$ и порождаемым таким же (однородным) полем массовых сил действия остальной части большой системы $\mathfrak{U}$ на тела подсистемы $\mathfrak{U}'$ (контактное действие на $\mathfrak{U}'$ отсутствует). Итак, доказана

Теорема. *Пусть для большой системы тел $\mathfrak{U}$ существует инерциальная система отсчета ϕ. Тогда для подсистемы тел $\mathfrak{U}'$, рассматриваемой как самостоятельная большая система, также найдется инерциальная система отсчета ϕ', универсальная по отношению к любым движениям тел из подсистемы $\mathfrak{U}'$, тогда и только тогда, когда контактные силы воздействия на тела из $\mathfrak{U}'$ со стороны остальных тел большой системы $\mathfrak{U}$ отсутствуют, а массовые силы этого воздействия характеризуются однородным полем (возможно, зависящим от времени). При этом ϕ' — любая такая система отсчета, которая движется относительно ϕ поступательно с ускорением* *центра масс соединенного тела Σ' подсистемы $\mathfrak{U}'$ под действием указанного однородного поля массовых сил.*

4. Заключение. В теореме установлены условия, необходимые и достаточные для существования системы отсчета ϕ', инерциальной для системы тел $\mathfrak{U}'$ при всевозможных их движениях и соответствующих (активных в рамках $\mathfrak{U}'$) взаимодействиях. При этом движение самой системы отсчета ϕ' относительно старой системы отсчета ϕ (инерциальной для $\mathfrak{U}$) является поступательным и определено лишь ускорением, т.е. с точностью до галилеевых преобразований. Это согласуется с результатами работы [7].

В таких условиях находится, например, любая система тел в состоянии свободного падения в однородном поле сил тяжести при любых активных взаимодействиях внутри этой системы (предметы в падающем лифте, в пикирующем самолете); инерциальной для этой системы тел является любая система отсчета ϕ', движущаяся с ускорением центра масс этой системы тел (с ускорением свободного падения), в том числе система отсчета, непосредственно связанная с центром масс этой системы тел.

Другой пример — Солнечная система и ее подсистема, составленная телами околоземного пространства (Земля, Луна, искусственные спутники). Система отсчета, движущаяся вместе с центром масс Солнечной системы поступательно относительно неподвижных звезд, с достаточной точностью может служить в качестве инерциальной для тел Солнечной системы. Воздействие всех остальных тел Солнечной системы на подсистему тел околоземного пространства сводится к практически однородному полю сил тяготения (в основном от Солнца), изменяющемуся со временем относительно указанной (старой) системы отсчета. Тогда согласно теореме любая система отсчета, движущаяся поступательно относительно старой с ускорением центра масс подсистемы тел околоземного пространства (в частности, связанная с этим центром масс), является инерциальной для подсистемы тел околоземного пространства (при любых их взаимодействиях друг с другом).

В теореме предъявлены точные условия существования инерциальных систем отсчета для подсистем тел в любых движениях. Равенство (22) с привлечением разработанных методов (например, в [7]) может быть проанализировано более детально с точки зрения его выполнения не для всевозможных, а лишь для определенных видов движений тел подсистемы $\mathfrak{U}'$, что позволит получить условия существования инерциальных для $\mathfrak{U}'$ систем отсчета не в указанном выше универсальном смысле, а лишь для этих видов движений и соответствующих активных взаимодействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
4. *Бровко Г.Л.* Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во Попечит. совета мех.-мат. ф-та МГУ. Ч. 1, 2011; Ч. 2, 2013.
5. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017.
6. *Аппель П., Дотевилль С.* Курс теоретической механики. Одесса: Матезис, 1912.
7. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: УРСС, 2003.

Поступила в редакцию
20.09.2018