Механика

УДК 517.01+531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

М. В. Шамолин[1]

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля, обладающие переменной диссипацией, обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамические уравнения, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

In this study, we show the integrability of certain classes of dynamic systems on the tangent bundle to a multi-dimensional manifold. In this case, the force fields have variable dissipation and generalize the cases considered previously.

Key words: dynamic equations, integrability, transcendental first integral.

В задачах динамики исследуются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в плане присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В настоящей работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4 см. [3–5]). При этом силовые поля, обладающие так называемой переменной диссипацией, обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении

$$T_*M^n\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dots,\dot\beta_{n-1};\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\},\quad \alpha=x^1,\quad \beta_1=x^2,\quad \dots\quad ,\quad \beta_{n-1}=x^n,\quad x=(x^1,\dots,x^n)$$

имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot x^i+\sum_{j,k=1}^n\Gamma^i_{jk}(x)\dot x^j\dot x^k=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим зависящую от точки x многообразия замену координат касательного пространства

$$\dot x^i=\sum_{j=1}^n R^{ij}(x)z_j, \tag{2}$$

[1] *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.

Shamolin Maxim Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientist, Lomonosov Moscow State University Institute of Mechanics.

которую почти всюду можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^n T_{ji}(x)\dot{x}^i$, при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \ldots, n$, — функции от $x^1, \ldots, x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n.

Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^n \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^n T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^n T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3}$$

где $T_{ji,k} = \partial T_{ji}/\partial x^k$, $j, i, k = 1, \ldots, n$. Подставляя в (3) уравнения (1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^n T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^n T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{4}$$

при этом в системе (4) вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$, следует подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^n Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(2)} = 0, \quad Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^n T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x).$$

Предложение 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Важный частный случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = -z_n,\\
&\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha),\\
&\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\\
&\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i_1(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$; $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$; $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$; $\ldots$; $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, \ldots, z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических [6, 7] (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + +\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots\\
&\quad \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots\\
&\quad \ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (5) уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned}
&\dot z_1 = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\
&\quad - \left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots \\
&\quad \ldots - \left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot r_1(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \\
&\dot z_2 = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots \\
&\quad \ldots - \left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot s_1(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\
&\quad -\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i^2_1(\beta_{n-2}) z^2_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \frac{f^2_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_1(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots \\
&\quad \ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot i^2_1(\beta_{n-2}) z^2_1, \\
&\dot z_n = \Gamma^\alpha_{11} f^2_1(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22} f^2_2(\alpha) g^2_1(\beta_1) z^2_2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1} f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot i^2_1(\beta_{n-2}) z^2_1,
\end{aligned} \tag{7}$$

здесь $DQ(q) = d \ln |Q(q)|/dq$, и уравнения (6) почти всюду эквивалентны составной системе (5), (7) на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (5), (7) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система $n(n-1)/2$ равенств*

$$\begin{aligned}
&2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2_1(\alpha) \equiv 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \ldots i^2_1(\beta_{n-2}) \equiv 0, \\
&\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] f^2_1(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f^2_2(\alpha) g^2_1(\beta_1) \equiv 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f^2_1(\alpha) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot i^2_1(\beta_{n-2}) \equiv 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] f^2_{n-2}(\alpha) g^2_{n-3}(\beta_1) h^2_{n-4}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot r^2_1(\beta_{n-3}) + \\
&\quad + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \cdot \ldots \cdot i^2_1(\beta_{n-2}) \equiv 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

то система (5), (7) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1) = z^2_1 + \ldots + z^2_n = C^2_1 = \mathrm{const}. \tag{9}$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (9) не “заслуживает” решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (8) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). Можно даже доказывать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ системы (8) квазилинейных уравнений с целью выявления наличия аналитического первого интеграла (9) для системы (5), (7) уравнений геодезических (6). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (8) нам не потребуется. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \ldots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{10}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (8):

$$\begin{aligned}
&2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\cdot\ldots\cdot r_1^2(\beta_{n-3}) +\\
&\quad + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности через систему (11), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены условия* (10), (11) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

то система (5), (7) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{13}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\}.$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения* 3, *а также*

$$g_1(\beta_1) = \ldots = g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1) \tag{14}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (5), (7) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_3(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{16}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)\,db\right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 5. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, … *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{17}$$

то система (5), (7) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_n(z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\cdot\ldots\cdot\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \tag{18}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)\,db\right\}, \qquad i(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}).$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, ..., *а также предложения* 5, *то система* (5), (7) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta)=\beta_{n-1}\pm\int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Phi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}\,db=C_{n+1}=\mathrm{const}. \tag{19}$$

Набор первых интегралов (9), (13), (16), ..., а также (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (5), (7) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (18) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [8]).

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Теперь, несколько модифицировав систему (5), (7) при условиях (10)–(12), (14), (15), ..., а также (17), получим систему консервативную. А именно наличие силового поля характеризуется достаточно гладким коэффициентом $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (20). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha=-z_n,\\
&\dot z_n=F(\alpha)+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2+\ldots\\
&\quad\ldots+\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot z_{n-1}=[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]\,z_{n-1}z_n-\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots\\
&\quad\ldots-\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot z_2=[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]\,z_2z_n-[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)]\,f(\alpha)z_2z_{n-1}-\ldots\\
&\quad\ldots-[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr(\beta_{n-3})]\,f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot s(\beta_{n-4})z_2z_3-\\
&\quad-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot z_1=[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]\,z_1z_n-[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)]\,f_1(\alpha)z_1z_{n-1}-\\
&\quad-[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)]\,f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2}-\ldots\\
&\quad\ldots-[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+Di(\beta_{n-2})]\,f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot r(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
&\dot\beta_1=z_{n-1}f(\alpha),\qquad \dot\beta_2=z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\qquad \dot\beta_3=z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot\beta_{n-1}=z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{20}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\ddot\alpha+F(\alpha)+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\ldots+\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0,\\
&\ddot\beta_1+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\ldots+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0,\\
&\ddot\beta_2+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2+\ldots+\Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0,\\
&\ddot\beta_3+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3+\\
&\quad+\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2+\ldots+\Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot\beta_{n-2}+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-2}+2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}+\ldots\\
&\quad\ldots+2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2=0,\\
&\ddot\beta_{n-1}+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-1}+2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}+\ldots+2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}=0.
\end{aligned}$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложения* 2, *то система* (20) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)\,db. \tag{21}$$

Предложение 8. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, …, *а также предложения* 5, *то система* (20) *имеет гладкие первые интегралы вида* (13), (16), …, *а также* (18).

Предложение 9. *Если выполнены условия предложения* 6, *то система* (20) *имеет первый интеграл вида* (19).

Набор первых интегралов (21), (13), (16), …, а также (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (20) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (19) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [8]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь усложним систему (20) и получим систему с диссипацией. А именно наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризуется достаточно гладким коэффициентом $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
&\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots\\
&\quad \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot z_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots\\
&\quad \ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot z_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots\\
&\quad \ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]\, f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot s(\beta_{n-4})z_2z_3 -\\
&\quad - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot z_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
&\quad - [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]\, f(\alpha)g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots\\
&\quad \ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]\, f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot r(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
&\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{22}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
&\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 +\\
&\quad + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_3 - b\dot\beta_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 +\\
&\quad + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot\beta_{n-2} - b\dot\beta_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}\ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\\ \ddot\beta_{n-1} - b\dot\beta_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots\\ \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0,\end{gathered}$$

здесь $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (22) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{23}$$

Введем (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (8):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{24}$$

Для полного интегрирования системы (22) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \ \ldots, \ w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}}$$

система (22) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot\alpha = -w_n + b\delta(\alpha),\\ \dot w_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w^2_{n-1},\\ \dot w_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_{n-1}w_n;\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\dot w_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right],\\ \dot\beta_s = \pm\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \quad s = 1,\ldots,n-2;\end{gathered} \tag{26}$$

$$\dot\beta_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w^2_{n-2}}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\cdot\ldots\cdot i(\beta_{n-2}), \tag{27}$$

где в системе (26) символом "..." показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (25)–(27) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (25) — по одному для систем (26) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (27) (т.е. всего $n+1$).

Теорема. *Пусть для некоторых κ, $\lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{28}$$

Тогда система (22) *при выполнении условий* (23), (24) *обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Для начала сопоставим системе третьего порядка (25) неавтономную систему второго порядка:

$$\frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w^2_{n-1}}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \quad \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]w_{n-1}w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \tag{29}$$

Далее, введя однородные переменные по формулам $w_n = u_n\delta(\alpha)$, $w_{n-1} = u_{n-1}\delta(\alpha)$, представим систему (29) в следующему виде:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha)\,\frac{du_n}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha)u_n^2 - b\delta'(\alpha)u_n}{-u_n+b}, \\ \delta(\alpha)\,\frac{du_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_{n-1}u_n + \delta'(\alpha)u_{n-1}u_n - b\delta'(\alpha)u_n}{-u_n+b}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

А с учетом условий (28) система (30) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \kappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - bu_n}{(1-\kappa)u_{n-1}u_n - bu_n}. \tag{31}$$

Уравнение (31) имеет вид уравнения Абеля [9]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - bu_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \text{const}, \tag{32}$$

который в прежних переменных выглядит так:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{33}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (25) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем инвариантное соотношение (32) при $u_{n-1} \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_n - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_{n-1} - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{34}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения удовлетворяют условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{35}$$

тогда фазовое пространство системы (21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (34).

Таким образом, в силу соотношения (32) первое уравнение системы (30) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_n}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_n + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_n)}{-u_n+b}, \qquad U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (35).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (25) будет иметь следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const} \tag{36}$$

и при $\kappa = -1$ его можно найти из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_n)\,du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2}, \qquad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить равенство (33). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (33), (36) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от квадратур, но и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (26) запишутся следующим образом:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \qquad s = 1,\ldots,n-2 \tag{37}$$

(о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1,\ldots,n-2$, см. (16), …, а также (18)). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (27), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_{n+1}(w_2,w_1;\alpha,\beta) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_n-2} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \mathrm{const},$$

при этом после взятия последнего интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить соответствующие левые части равенства (37).

5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (25) становится динамической системой, обладающей переменной диссипацией с нулевым средним [1–5]. При $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (21), (13). В силу (28)

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1;\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)\,db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{38}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом ввиду (24) и (28) имеем

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{39}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (38), (39) (или (21), (13)) также является первым интегралом системы (25) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{40}$$

и (39) по отдельности не является первым интегралом системы (25). Однако отношение функций (40), (39) является первым интегралом системы (25) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов обусловлена имеющимися в системе притягивающими или отталкивающими предельными множествами [10].

6. Некоторые приложения. По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{41}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{42}$$

Случай (41) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [11]. Случай (42) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на n-мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n-мерной сфере. В случае (41) если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [11]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный $(n+1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2].

Если функция $\delta(\alpha)$ не периодическая, то рассматриваемая диссипативная система является системой, обладающей переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). Тем не менее и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также представляет собой новый *нетривиальный* случай интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 1 // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. **134**. 6–128.
2. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 2 // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. **135**. 3–93.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Докл. РАН. 2017. **475**, № 5. 519–523.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Докл. РАН. 2017. **477**, № 2. 168–172.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Докл. РАН. 2018. **479**, № 3. 270–276.
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. 1984. **219**, № 2. 228–237.
8. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
10. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. **53**, вып. 3. 209–210.
11. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. матем. 2015. **20**, вып. 4. 3–231.

Поступила в редакцию
24.04.2018

УДК 511

ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ СМЕСЬЮ ГАЗОВ И ВОДЫ С ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Д. И. Романова[1], В. Р. Душин[2], В. Ф. Никитин[3]

В статье приводятся результаты численного моделирования термогазового вытеснения нефти из пористого коллектора. Вытеснение производится посредством нагретой смеси газа и воды. Закачиваемый газ — двухкомпонентный, состоит из азота и кислорода. В процессе реакции выделяются тепло, углекислый газ и водяной пар. В результате тепловыделения вязкость нефти снижается и процесс вытеснения ускоряется.

Ключевые слова: термогазовый метод, вытеснение нефти, пористая среда, трехфазный поток.

The paper presents the results of numerical modeling of thermogas displacement of oil from a porous reservoir. In this method, displacement is performed by means of a heated mixture

---

[1] *Романова Дарья Игоревна* — асп. каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: romanovadi@gmail.com.

[2] *Душин Владислав Роальдович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vladdush@rambler.ru.

[3] *Никитин Валерий Федорович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vfnikster@gmail.com.

Romanova Daria Igorevna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

Dushin Vladislav Roaldovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.

Nikitin Valeriy Fedorovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.