УДК 517.928 + 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ГЛАДКОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В. Е. Владыкина[1]

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля в обобщенной форме с краевыми условиями Дирихле и минимальными условиями на гладкость коэффициентов. Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Для нормированных в L^p собственных функций установлены равномерные оценки в норме пространства непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнение Штурма–Лиувилля, асимптотики собственных значений, асимптотики собственных функций, сингулярные коэффициенты.

In this paper we consider the Sturm–Liouville problem in general form with Dirichlet boundary conditions under the minimal smoothness assumptions for the coefficients. We obtain the asymptotics formulas for eigenvalues and eigenfunctions of this problem. In assumption that L^p-norm of eigenfunctions is equal to 1, we get uniform estimates of the Chebyshev norm.

Key words: the Sturm–Liouville equation, asymptotics of the eigenvalues, asymptotics of the eigenfunctions, singular coefficients.

1. Введение. Уравнение Штурма–Лиувилля в общей форме обычно записывают в виде

$$-(r(x)y')' + q(x)y = \lambda\rho(x)y, \qquad y = y(x), \quad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр. Если r и ρ — вещественные, положительные, достаточно гладкие функции, то замены (преобразование Лиувилля)

$$t(x) = \int\limits_a^x \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{r(\xi)}}\, d\xi,$$

$$z(t) = f(t)y(x(t)), \quad f(t) = \sqrt[4]{\rho(x(t))r(x(t))}$$

приводят уравнение (1) к нормальной форме (см., например, [1]):

$$z'' + Q(t)z = \lambda z, \quad z = z(t), \qquad \text{где} \quad Q(t) = \frac{q(x(t))}{r(x(t))} + \frac{f''(t)}{f(t)}. \tag{2}$$

Для уравнения (1) может быть поставлена спектральная задача, т.е. на концах интервала (a,b) предполагаются выполненными краевые условия. В случае конечного интервала ставятся два краевых условия, например условия Дирихле

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{D}$$

При таких краевых условиях получаем задачу Дирихле на отрезке $[0,h]$, где $h = t(b)$, для уравнения (2). Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевых задач для канонического уравнения (2) хорошо известны (см., например, [2, гл. 1; 3, гл. 2]). В частности, в случае краевых условий Дирихле собственные значения и собственные функции имеют асимптотику

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{h} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad z_n = \sin\frac{\pi n t}{h} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

[1] *Владыкина Вероника Евгеньевна* — ассист. каф. фундаментальной и прикладной математики ф-та космических исследований МГУ, e-mail: vika-chan@mail.ru.

Vladykina Veronika Evgen'evna — Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Cosmic Research, Chair of Fundamental and Applied Mathematics.

Предположение о гладкости коэффициентов r, ρ, q в (1) при использовании преобразования Лиувилля существенно. Для получения асимптотик (3) необходимо требовать условия

$$r, \rho \in W^{2,1}[a,b], \quad q \in L^1[a,b], \tag{C}$$

где $W^{k,p}$ — пространство Соболева, состоящее из функций y, для которых $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ абсолютно непрерывны, а $y^{(k)} \in L^p[a,b]$, $p \geqslant 1$.

Наша цель — получить асимптотические формулы задачи на собственные значения для уравнения (1) при минимальной гладкости коэффициентов, более того, мы допускаем, что функция q является распределением первого порядка сингулярности. В случае $r(x) \equiv \rho(x) \equiv 1$ соответствующие результаты были получены в работе [4]. Кроме того, нами будут установлены равномерные оценки нормированных в L^p собственных функций в чебышёвской норме.

2. Асимптотика собственных значений и собственных функций. Далее вместо (1) рассмотрим более общее уравнение в более удобной для нас форме:

$$-(r^2y')' + py' + qy = \lambda^2\rho^2 y, \qquad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

где r и ρ — абсолютно непрерывные, положительные функции, а p и q — комплекснозначные, причем

$$p \in L^1[a,b], \quad q \in W^{-1,2}[a,b]. \tag{5}$$

Последнее условие означает, что первообразная $u = \int q\,dx$, понимаемая в смысле теории распределений, принадлежит пространству $L^2[a,b]$.

Кроме того, предположим, что

$$\rho' u, ru, pu \in L_1[a,b], \quad \text{где } u = \int q\,dx. \tag{6}$$

Конечно, эти условия на коэффициенты существенно менее ограничительны, нежели условия (C), требуемые для проведения преобразования Лиувилля. Однако платой за меньшую гладкость коэффициентов будет менее точная оценка остатка в асимптотических формулах. Для простоты изложения далее ограничимся рассмотрением задачи Дирихле для уравнения (4).

Основным инструментом при получении асимптотических формул для спектральных характеристик будет служить следующий результат [5, 6].

Теорема [6]. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5) *и* (6). *Тогда для любого* $s > 0$ *фундаментальные решения задачи* (4) *представимы в виде*

$$y_\pm(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1 + \varphi_\pm(x,\lambda)). \tag{7}$$

Здесь функции $\varphi_\pm$ *аналитические в полуплоскости* $\Pi_s^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda \geqslant -s\}$ *при* $|\lambda| > R$ *и*

$$|\varphi_+(x,\lambda)| + |\varphi_-(x,\lambda)| = o(1) \quad \textit{при } |\lambda| \to \infty,\ \lambda \in \Pi_s^+,$$

равномерно по $x \in [a,b]$. *Асимптотики* (7) *можно почленно дифференцировать, если вместо производной рассматривать квазипроизводную*

$$y^{[1]} = y' - h(x)\frac{\rho}{r}y, \ \textit{где } h = \int \frac{q}{r\rho}\,dx,$$

а именно:

$$y_\pm^{[1]}(x,\lambda) = \pm i\lambda\sqrt{\frac{\rho}{r^3}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2} \pm i\lambda \int_a^x \frac{\rho}{r}\right)(1 + \psi_\pm(x,\lambda)), \tag{8}$$

где функции $\psi_\pm$ *обладают тем же свойством, что и функции* $\varphi_\pm$. *Утверждение теоремы сохраняется, если вместо полуплоскости* Π_s^+ *рассматривать полуплоскость* $\Pi_s^- = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda \leqslant s\}$.

Из этого результата следует

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6). *Тогда собственные значения задачи* (4), (D) *имеют вид*

$$\lambda_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{h^2}(1 + o(1/k)), \quad \textit{где} \quad h = \int\limits_a^b \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)}d\xi.$$

Доказательство. Рассмотрим полуплоскость Π_s^+ (для полуплоскости Π_s^- рассуждения аналогичны). Собственные значения являются корнями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1)\, U_2(y_1) \\ U_1(y_2)\, U_2(y_2) \end{vmatrix},$$

где $U_j(y)$, $j = 1, 2$, обозначают краевые условия. Для удобства обозначим

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x) r(x)}}, \qquad P(x) = e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}}, \quad t(x) = \int\limits_a^x \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)} d\xi, \quad h = t(b).$$

Составим характеристический определитель задачи (4) с краевыми условиями Дирихле:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} R(a)\,(1 + o(1)) & R(b)P(b)\exp(i\lambda\, h)\,(1 + o(1)) \\ R(a)\,(1 + o(1)) & R(b)P(b)\exp(-i\lambda\, h)\,(1 + o(1)) \end{vmatrix} =$$

$$= R(a)R(b)P(b)\left(e^{-i\lambda\, h}\,(1 + o(1)) - e^{i\lambda\, h}\,(1 + o(1))\right).$$

Корни характеристического определителя являются корнями уравнения

$$e^{-i\lambda\, h}\,(1 + \alpha(\lambda)) - e^{i\lambda\, h}\,(1 + \beta(\lambda)) = 0,$$

где $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ стремятся к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Рассмотрим $\lambda_k^0 = \frac{\pi k}{h}$ — корни уравнения $e^{-i\lambda\, h} - e^{i\lambda\, h} = 0$ и воспользуемся теоремой Руше. Для этого построим окружности радиуса r_k около λ_k^0 начиная с $k = K$, такого, чтобы при $|\lambda| > \lambda_{K-1}^0$ были верны оценки $|\alpha(\lambda)| < \min\{1, \frac{\pi}{2h}\}$, $|\beta(\lambda)| < \min\{1, \frac{\pi}{2h}\}$. Числа r_k будем брать такими, чтобы были верны оценки $|\alpha(\lambda)| < \frac{1}{2} r_k h$, $|\beta(\lambda)| < \frac{1}{2} r_k h$ в кольце $\lambda_k^0 - 1 < |\lambda| < \lambda_k^0 + 1$. Очевидно, можно выбрать последовательность радиусов r_k стремящейся к нулю. Тогда на окружности $|\lambda - \lambda_k^0| = r_k$ будут выполнены оценки $\left|e^{-i\lambda\, h} - e^{i\lambda\, h}\right| \geqslant r_k h$, $\left|e^{-i\lambda\, h}\alpha(\lambda) - e^{i\lambda\, h}\beta(\lambda)\right| < r_k h$. Значит, внутри каждого круга $|\lambda - \lambda_k^0| < r_k$ лежит один корень $\Delta(\lambda)$ кратности 1. Таким образом, мы получили серию $\{\lambda_k\}_{k=K}^{\infty}$ корней характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Покажем, что незанумерованными остались ровно $K - 1$ корней. Для этого рассмотрим окружность $|\lambda| = \lambda_k^0 + \frac{\pi}{2h}$ при $k \geqslant K - 1$. Тогда на этой окружности $\left|e^{-i\lambda\, h} - e^{i\lambda\, h}\right| = 2$, $\left|e^{-i\lambda\, h}\alpha(\lambda) - e^{i\lambda\, h}\beta(\lambda)\right| < 2$, значит, по теореме Руше $\Delta(\lambda)$ имеет внутри каждого такого круга ровно k корней. Таким образом,

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{h} + o(1), \tag{9}$$

и теорема доказана.

Теперь мы можем получить асимптотики собственных функций нашей задачи.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6). *Тогда собственные функции задачи* (4), (D) *имеют вид*

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x) r(x)}} e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}} \sin\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1), \quad \text{где} \quad h = \int\limits_a^b \frac{\rho(\xi)}{r(\xi)} d\xi. \tag{10}$$

Доказательство. Найдем y_k по формуле

$$y_k = \begin{vmatrix} U_1(y_1)\, y_1 \\ U_1(y_2)\, y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R(a)\,(1 + o(1)) & R(x)P(x)e^{i\lambda_k\, t(x)}\,(1 + o(1)) \\ R(a)\,(1 + o(1)) & R(x)P(x)e^{-i\lambda_k\, t(x)}\,(1 + o(1)) \end{vmatrix} =$$

$$= R(a)R(x)P(x)\left(e^{-i\lambda_k\, t(x)}\,(1 + o(1)) - e^{i\lambda_k\, t(x)}\,(1 + o(1))\right).$$

С учетом (9) имеем

$$e^{\lambda_k} = e^{\lambda_k^0 + o(1)} = e^{\lambda_k^0}(1 + o(1)).$$

Тогда с точностью до умножения на константу

$$y_k = R(x)P(x)\left(\sin\lambda_k^0\, t(x) + e^{-i\lambda_k^0\, t(x)}o(1) + e^{i\lambda_k^0\, t(x)}o(1)\right).$$

Поскольку $\lambda_k^0 = \frac{\pi k}{h}$, то $\left|e^{i\lambda_k^0\, t(x)}\right| = 1$, а значит,

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}}e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}}\sin\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right) + o(1),$$

и теорема доказана.

Заметим, что по сравнению с асимптотиками для задачи с гладкими коэффициентами (3) остаточный член в асимптотических формулах (9) и (10) менее точен ($o(1)$ вместо $O(1/n)$).

3. Равномерные оценки нормированных в L^p собственных функций. Здесь будут получены равномерные оценки норм собственных функций задачи (4) с краевыми условиями Дирихле.

В случае $q \equiv 0$, $p \equiv r \equiv 1$ в работе [7] для непрерывных весов ρ была установлена точная оценка для нормированных в L^2 собственных функций задачи (4), (D):

$$\|y_n\|_{C[0;1]} \leqslant C(\rho)\lambda_n^{1/2}\|y_n\|_{L^2[0;1]}.$$

Позднее в [8] рассматривались непрерывные веса ρ ограниченной вариации. И для собственных функций задачи (4), (D) была получена равномерная по n оценка

$$\|y_n\|_{C[0;1]} \leqslant C(\rho)\|y_n\|_{L^2[0;1]}.$$

Применяемый в [8] подход основан на использовании квадратичных форм, что не позволяет обобщить его на случай $p \geqslant 1$. Поэтому для получения интересующих нас оценок будут использованы асимптотики собственных функций при $\rho \in AC[0;1]$.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6)*. Тогда для собственных функций y_n задачи* (4), (D) *верна равномерная по n оценка*

$$\|y_n\|_{C[a,b]} \leqslant C\|y_n\|_{L^p[a,b]}, \qquad \forall p > 1.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 собственные функции задачи имеют асимптотики (10).

Выберем число N так, чтобы при $n > N$ была верна оценка $|o(1)| < \varepsilon$. Функции r и ρ отделены от нуля на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$M = \max\left\{\max_{x\in[a,b]} r(x), \max_{x\in[a,b]} \rho(x)\right\}, \qquad m = \min\left\{\min_{x\in[a,b]} r(x), \min_{x\in[a,b]} \rho(x)\right\}.$$

Тогда при $n > N$ можно оценить в равномерной норме собственные функции y_n:

$$\|y_n\|_{C[0,1]} \leqslant \frac{1}{m}e^{\frac{1}{m^2}\|p\|_{L_1[a,b]}} + \varepsilon.$$

Теперь получим оценку собственных функций по норме L_1:

$$\|y_n\|_{L_1[0,1]} = \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}}e^{\frac{1}{2}\int_a^x pr^{-2}}\left|\sin\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right)\right| + |o(1)|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{M}e^{-\frac{\|p\|_{L_1[a,b]}}{2M^2}}\int\limits_a^b \left|\sin\left(\frac{\pi k}{h}\int_a^x \rho r^{-1}\right)\right| dx - \varepsilon(b-a) = \left[t = \int\limits_a^x \rho r^{-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{M}e^{-\frac{\|p\|_{L_1[a,b]}}{2M^2}}\int\limits_0^h \left|\sin\left(\frac{\pi k}{h}t\right)\right| \frac{r}{\rho}\,dx - \varepsilon(b-a) \geqslant \frac{2hm}{M^2\pi}e^{-\frac{\|p\|_{L_1[a,b]}}{2M^2}} - \varepsilon(b-a).$$

Выберем число ε так, чтобы последняя разность была положительна. Тогда существуют $C_1, C_2 > 0$, такие, что $\|y_n\|_{C[0,1]} \leqslant C_1$, $\|y_n\|_{L_1[0,1]} \geqslant C_2$ при $n > N$, а значит, можно выбрать не зависящую от n константу C, такую, что

$$\|y_n\|_{C[a,b]} \leqslant C\|y_n\|_{L_1[a,b]}.$$

Из этой оценки и неравенства Гёльдера сразу следует утверждение теоремы.

4. Задача с регулярными краевыми условиями. Рассмотрим задачу (4) с краевыми условиями:

$$U_j(y) = \alpha_{j0}y(a) + \alpha_{j1}y^{[1]}(a) + \beta_{j0}y(b) + \beta_{j1}y^{[1]}(b) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{11}$$

Число ν_j называется порядком линейной формы вида (11), если по меньшей мере один из коэффициентов при $y^{(\nu_j)}(a)$ или $y^{(\nu_j)}(b)$ отличен от нуля, а все коэффициенты при производных порядка $k > \nu_j$ равны нулю. Суммарным порядком краевых условий вида (11) называется число $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Краевые условия называются нормированными, если любые их линейные комбинации имеют не меньший суммарный порядок (далее считаем краевые условия (11) нормированными). Здесь мы заимствуем определение регулярности краевых условий из работы [9], которое (для случая, когда коэффициенты уравнения — классические функции) эквивалентно известному определению из книги М.А. Наймарка [3, гл. 2].

Действуя аналогично [3, гл. 2], определим числа $\theta_1, \theta_0, \theta_{-1}$ с помощью равенства

$$\begin{vmatrix} (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + sp_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_1^{\nu_1} & (p_{\nu_1}(a)\alpha_{1\nu_1} + \frac{1}{s}p_{\nu_1}(b)\beta_{1\nu_1})\omega_2^{\nu_1} \\ (p_{\nu_2}(a)\alpha_{2\nu_2} + sp_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_1^{\nu_2} & (p_{\nu_2}(a)\alpha_{2\nu_2} + \frac{1}{s}p_{\nu_2}(b)\beta_{2\nu_2})\omega_2^{\nu_2} \end{vmatrix} = \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s,$$

где $p_0(x) = R(x)P(x)$, $p_1(x) = \frac{P(x)}{R(x)r^2(x)}$, $\omega_1 = i$, $\omega_2 = -i$. Краевые условия будем называть регулярными, если числа θ_1 и θ_{-1} отличны от нуля.

Комбинируя рассуждения из п. 2 настоящей работы и монографии [3, гл. 2, §4] и используя (7) и (8), получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6). *Тогда собственные значения задачи* (4), (11) *образуют две последовательности*

$$\lambda_{1,k}^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i\ln_0\xi'}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

$$\lambda_{2,k}^2 = \left(\frac{2k\pi}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{i\ln_0\xi''}{2k\pi} + o(1/k)\right),$$

где ξ', ξ'' *— корни уравнения* $\theta_1 s^2 + \theta_0 s + \theta_{-1} = 0$, *возможно, совпадающие. При этом в случае* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$ *все собственные значения начиная с некоторого простые, а в случае* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$ *— простые или двукратные.*

Теорема 5. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6), *и пусть* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$. *Тогда собственные функции задачи* (4), (11) *образуют две последовательности*

$$y_{1,k} = p_0(x)(-i)^{\nu_2}e^{i\lambda_{1,k}\,t(x)}\left(\alpha_{2\nu_2}p_{\nu_2}(a) + \frac{1}{\xi'}\beta_{2\nu_2}p_{\nu_2}(b) + o(1)\right) -$$

$$-p_0(x)i^{\nu_2}e^{-i\lambda_{1,k}\,t(x)}\left(\alpha_{2\nu_2}p_{\nu_2}(a) + \xi'\beta_{2\nu_2}p_{\nu_2}(b) + o(1)\right), \tag{12}$$

где

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)r(x)}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right), \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{\rho}{r^3}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x \frac{p}{r^2}\right), \quad t(x) = \int_a^x \frac{\rho}{r},$$

а формула для $y_{2,k}$ *получается из* (12) *заменой* ξ' *на* ξ'' *и* $\lambda_{1,k}$ *на* $\lambda_{2,k}$.

Повторяя доказательство теоремы 3, получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6), *и пусть* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$. *Тогда существует* $C > 0$, *такое, что для всех собственных функций* y_n *задачи* (4), (11) *верна оценка*

$$\|y_n\|_{C[a,b]} \leqslant C\|y_n\|_{L^p[a,b]}, \qquad \forall p > 1.$$

Автор приносит благодорность профессору А. А. Шкаликову за постановку задачи и замечание о том, что без требования условия сильной регулярности ($\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$) асимптотические формулы (12) для собственных функций могут не сохраняться (этот факт в [3] не отмечен).

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РНФ, № 17–11–01215.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fulton C.T., Pruess S., Xie Yu.* The automatic classification of Sturm–Liouville problems // J. Appl. Math. Comput. 2005. **124**. 149–186.
2. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010.
4. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. матем. о-ва. 2003. **64**. 159–212.
5. *Shkalikov A.A., Vladykina V.E.* Asymptotics of the solutions of the Sturm–Liouville equation with singular coefficients // Math. Notes. 2015. **99**, N 5. 891–899.
6. *Владыкина В.Е.* Асимптотика фундаментальных решений уравнения Штурма–Лиувилля по спектральному параметру // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 1. 57–61.
7. *Якубов В.Я.* Неклассические двусторонние точные оценки для нормированных собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 4. 37–44.
8. *Якубов В.Я.* Ограниченность нормированных собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при минимальных ограничениях на гладкость коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1994. **30**, № 8. 1465–1467.
9. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. **9**. 190–229.

Поступила в редакцию
12.04.2019