Автор приносит благодарность научному руководителю Е. Т. Шавгулидзе за постановку задачи и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hulanicki A.* The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field // Stud. math. 1976. **56**, N 2. 165–173.
2. *Gaveau B.* Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents // Acta math. 1977. **139**, N 1–2. 95–153.
3. *Vatanabe S.* Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and it's applications to heat kernels // Ann. Probab. 1987. **15**, N 1. 1–39.
4. *Мамон С.В.* Мера Винера на группе Гейзенберга и параболические уравнения // Фунд. и прикл. матем. 2016. **21**, № 4. 67–98.

Поступила в редакцию
26.09.2016
После доработки
26.09.2018

УДК 515.124, 515.126.4, 512.562

ПОИСК НУЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛОВ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. Н. Фоменко[1]

Доказаны принцип поиска нулей (α, β)-поисковых функционалов и вытекающие из него теоремы о неподвижных точках и совпадениях наборов однозначных и многозначных отображений (b_1, b_2)-квазиметрических пространств. Полученные теоремы являются развитием установленных ранее автором результатов для метрических пространств. В частности, получено обобщение недавнего результата о совпадениях накрывающего и липшицева отображений (b_1, b_2)-квазиметрических пространств.

Ключевые слова: (b_1, b_2)-квазиметрическое пространство, (α, β)-поисковый функционал, неподвижная точка, точка совпадения.

The cascade search principle for zeros of (α, β)-search functionals and consequent fixed point and coincidence theorems are proved for collections of single-valued and set-valued mappings of (b_1, b_2)-quasimetric spaces. These results are extensions of some previous author's results in metric spaces. In particular, a generalization is obtained for some recent result on coincidences of a covering mapping and a Lipshitzian mappings of (b_1, b_2)-quasimetric spaces.

Key words: (b_1, b_2)-quasimetric space, (α, β)-search functional, fixed point, coincidence point.

1. Введение и предварительные сведения. Полезным методом исследования функционалов, заданных на метрическом пространстве, является принцип поиска нулей так называемых (α, β)-поисковых функционалов, разработанный в [1–3]. Важность этого принципа заключается и в том, что из него получается целый ряд теорем о существовании неподвижных точек, точек совпадения наборов отображений (как однозначных, так и многозначных) метрических пространств, а также теорем о существовании прообразов заданного подпространства метрического пространства, представленных в [1–3].

---

[1] *Фоменко Татьяна Николаевна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей математики ф-та ВМК МГУ, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

Fomenko Tatiana Nikolaevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.

В настоящей работе результаты работ [1–3] о поиске нулей (α,β)-функционалов, а также о неподвижных точках и совпадениях отображений метрических пространств распространяются на случай (b_1,b_2)-квазиметрических пространств. Рассматриваются как однозначные, так и многозначные функционалы и отображения. В частности, получены обобщения некоторых результатов работы [4].

Приведем сначала необходимые обозначения, определения и некоторые результаты для метрических пространств из работ [1–3]. Для полноты изложения представим их с краткими доказательствами.

Пусть (X,d) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный функционал. Будем обозначать через $\mathrm{Nil}(\varphi) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : \varphi(\mathrm{x}) = 0\} = \mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ множество нулей функционала φ, $\mathrm{Graph}(\varphi) := \{(x,\varphi(x))\}_{x\in X}$.

Определение 1. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ $\{0\}$-*полон*, если любая фундаментальная последовательность $\{x_k\} \subseteq X$, такая, что $\varphi(x_k)$ сходится к нулю, имеет предел $\xi \in X$ и $\varphi(\xi) = 0$. График $\mathrm{Graph}(\varphi)$ называется $\{0\}$-*замкнутым*, если для любой последовательности $\{(x_k,\varphi(x_k))\} \subseteq \mathrm{Graph}(\varphi)$, сходящейся к $(\xi,0) \in X\times\mathbb{R}_+$, верно, что $(\xi,0) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$, т.е. $\varphi(\xi) = 0$.

Определение 2. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ называется (α,β)-*поисковым на* X (относительно метрики d), если для любой точки $x_0 \in X$ существует точка $x' \in X$, для которой $d(x_0,x') \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\alpha}$, $\varphi(x') \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_0)$.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1, теорема 1]. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный (α,β)-поисковый на X функционал, где $0 < \beta < \alpha$. Пусть либо график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *функционала φ является* 0*-полным, либо X — полное пространство и график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 0*-замкнут. Тогда для каждой точки $x_0 \in X$ существует такая точка $\xi \in \mathrm{Nil}(\varphi)$, что $d(x_0,\xi) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\alpha-\beta}$.*

Доказательство Пусть $x_0 \in X$ — произвольная фиксированная точка. В силу условий теоремы и определения (α,β)-поискового функционала φ можно построить последовательность точек $\{x_m\}_{m=0,1,2,\ldots}$, удовлетворяющую следующим условиям: (a) $d(x_m,x_{m+1}) \leqslant \frac{\varphi(x_m)}{\alpha}$; (b) $\varphi(x_{m+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_m)$, причем если точка x_m уже выбрана и $\varphi(x_m) = 0$, т.е. $x_m \in A$, то полагаем $x_j = x_m$ для всех $j > m$. Если же $\varphi(x_m) > 0$, то согласно условиям теоремы и определению (α,β)-поискового функционала φ существует точка x_{m+1}, удовлетворяющая условиям (a) и (b). Эта последовательность фундаментальна, так как $d(x_m,x_{m+1}) \leqslant \frac{\varphi(x_m)}{\alpha} \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^m\cdot\frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Кроме того, ясно, что $\varphi(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, последовательность $\{(x_m,\varphi(x_m))\}_{m=0,1,\ldots}$ точек графика φ фундаментальна. А поскольку либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 0-полон, либо пространство X полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 0-замкнут, то в обоих случаях эта последовательность точек графика сходится к некоторой точке $(\xi,0)$ и $(\xi,0) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$. Это означает, что $\varphi(\xi) = 0$, т.е. $\xi \in A$. Расстояние $d(x_0,\xi)$ несложно оценить:

$$d(x_0,\xi) = \lim_{m\to\infty} d(x_0,x_m) \leqslant \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} d(x_{k-1},x_k) \leqslant \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k-1}\cdot\frac{\varphi(x_0)}{\alpha} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha-\beta}. \quad \square$$

Отметим, что в [5] получено другое доказательство теоремы 1, а именно с использованием упорядочивания метрического пространства по методу Брондстеда (Brøndsted).

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. В ней фигурирует аналог (α,β)-поискового функционала на подмножестве декартова произведения метрических пространств. Пусть $(X,d),(Y,\mu)$ — метрические пространства. Метрика в $X\times Y$ задана по правилу $\nu((x,y),(x',y')) := d(x,x') + \mu(y,y')$, $\forall x,x' \in X, y,y' \in Y$.

Теорема 2. *Пусть $D \subseteq X\times Y$ — заданное замкнутое подмножество, $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный функционал. Пусть для функционала φ и чисел α,β,γ, где $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, выполнены следующие условия. Для каждой точки $(x,y) \in D$ существует точка $(x',y') \in D$, такая, что $d(x,x') \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x,y)$, $d(y,y') \leqslant \gamma\varphi(x,y)$ и $\varphi(x',y') \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x,y)$. Пусть также либо график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *функционала φ является* 0*-полным, либо D — полное пространство и график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 0*-замкнут.*

Тогда для любой точки $(x_0,y_0) \in D$ существует последовательность $\{(x_k,y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq D$, сходящаяся к некоторой точке $(\xi,\psi) \in D$, где $\varphi(\xi,\psi) = 0$, и верны следующие оценки на расстояния: $d(x_0,\xi) \leqslant \frac{\varphi(x_0,y_0)}{\alpha-\beta}$, $\mu(y_0,\psi) \leqslant \frac{\gamma\alpha\varphi(x_0,y_0)}{\alpha-\beta}$.

Доказательство. Зафиксируем начальную точку $(x_0,y_0) \in D$. Исходя из условий теоремы, можно построить начинающуюся из этой точки последовательность $\{(x_k,y_k)\}_{k=0,1,\ldots}$, удовлетворяющую условиям $d(x_k,x_{k+1}) \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x_k,y_k)$, $d(y_k,y_{k+1}) \leqslant \gamma\varphi(x_k,y_k)$ и $\varphi(x_{k+1},y_{k+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k,y_k)$,

$k = 0, 1, \ldots$. Отсюда следует, что $\nu((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leqslant K\varphi(x_k, y_k)$, где $K = \alpha^{-1} + \gamma$. Поэтому имеем

$$\nu((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k K\varphi(x_0, y_0).$$

Таким образом, последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots}$, а также каждая из последовательностей $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$ являются фундаментальными. В силу условий теоремы все они сходятся к некоторым точкам $(\xi, \psi), \xi, \psi$ соответственно, причем $\varphi(\xi, \psi) = 0$. Требуемые в теореме оценки расстояний $d(x_0, \xi)$ и $\mu(y_0, \psi)$ доказываются стандартно. □

Обозначим далее через $C(Y)$ совокупность замкнутых подмножеств в Y. Пусть $F : X \to C(Y)$ — многозначное отображение и $H \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y.

Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(F)$ отображения F является H-полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(F)$, для которой $\mu(y_n, H) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(F)$, где $\mu(\eta, H) = 0$, т.е. $\eta \in H$ и, следовательно, $\xi \in F^{-1}(H) \subseteq X$.

Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(F)$ отображения F является H-замкнутым, если все предельные точки $\mathrm{Graph}(F)$ вида (ξ, η), где $\eta \in H$, принадлежат графику $\mathrm{Graph}(F)$.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3 [2, теорема 1]. *Пусть $F : X \to C(Y)$ — многозначное отображение и $H \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y. Пусть $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$ и для каждых $x \in X$ и $y \in F(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y' \in F(x')$, для которых $\rho(x, x') \leqslant \frac{\mu(y,H)}{\alpha}$, $\mu(y, y') \leqslant \gamma \cdot \mu(y, H)$ и $\mu(y', H) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mu(y, H)$. Пусть либо график $\mathrm{Graph}(F)$ отображения F является H-полным, либо пространство $X \times Y$ полно и график $\mathrm{Graph}(F)$ является H-замкнутым. Тогда для каждого $x_0 \in X$ и каждого $y_0 \in F(x_0)$ существует начинающаяся из x_0 сходящаяся последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots} \subseteq X$, $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, $\xi \in F^{-1}(H)$, и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \frac{\mu(y_0,H)}{\alpha-\beta}$, где $\xi = \xi(x_0, y_0)$. Кроме того, существует последовательность $\{y_m\}, y_m \in F(x_m), m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \eta, \eta \in H \cap F(\xi)$, причем $\mu(y_0, \eta) \leqslant \frac{\gamma\alpha\mu(y_0,H)}{\alpha-\beta}$.*

Доказательство. Покажем, что из условий теоремы 3 вытекают условия теоремы 2 при подходящем выборе функционала φ. В самом деле, пусть $D = \mathrm{Graph}(F) \subseteq X \times Y$ и функционал $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ определен по правилу $\varphi(x, y) := \mu(y, H) := \inf\limits_{z\in H}\{\mu(y, z)\}$. Тогда условия теоремы 3 означают, что для каждой точки $(x, y) \in D$ существует точка $(x', y') \in D$, такая, что $d(x, x') \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x, y)$, $\mu(y, y') \leqslant \gamma\varphi(x, y)$ и $\varphi(x', y') \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x, y)$.

В соответствии с условиями теоремы построим, как в доказательстве теоремы 2, последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F) = D$, удовлетворяющую условиям

$$d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x_k, y_k), \quad \mu(y_k, y_{k+1}) \leqslant \gamma\varphi(x_k, y_k), \quad \varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k, y_k), k = 0, 1, \ldots.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x_k, y_k) \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^k\varphi(x_0, y_0)$, $\nu((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) := d(x_k, x_{k+1}) + \mu(y_k, y_{k+1}) \leqslant K\varphi(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, где $K = \alpha^{-1} + \gamma$.

Получаем, что последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F) = D$, а также последовательности $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$ являются фундаментальными. Кроме того, по построению $\varphi(x_k, y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Если $\mathrm{Graph}(F)$ H-полон, то график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$-полным. Если пространство $X \times Y$ полно и график $\mathrm{Graph}(F)$ H-замкнут, то график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$-замкнутым. Итак, выполнены все условия теоремы 2, в силу которой $\varphi(\xi, \eta) = \mu(\eta, H) = 0$, т.е. $\eta \in H$ и, следовательно, $\xi \in F^{-1}(H)$. Требуемые в теореме 3 оценки расстояний $d(x_0, \xi)$ и $\mu(y_0, \eta)$ получаются стандартно. □

Приведем еще одно следствие из теоремы 2, которое является частным случаем теоремы 3. Ниже в произведении $Y^n = Y \times \ldots \times Y$ рассматривается метрика $\hat{\mu}$, где $\hat{\mu}(y, z) := \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(y_k, z_k)$ для любых $y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in Y^n$.

Теорема 4 [2, теорема 2]. *Пусть $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$, $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$, причем график $\mathrm{Graph}(F)$ отображения F является Δ_n-замкнутым, где $\Delta_n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in Y^n | y_1 = \ldots = y_n\}$ — диагональ в Y^n, и хотя бы один из графиков $\mathrm{Graph}(F_i))$, $i = 1, \ldots, n$, является полным. Пусть числа α, β, γ, где $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, таковы, что для каждого $x \in X$ и каждого $y \in F(x)$ существуют точки $x' \in X$ и $y' \in F(x')$, для которых $\rho(x, x') \leqslant \frac{d(y,\Delta_n)}{\alpha}$, $d(y, y') \leqslant \gamma \cdot d(y, \Delta_n)$*

и $d(y', \Delta_n) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, \Delta_n)$. *Тогда для каждой точки* $x_0 \in X$ *существует последовательность* $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$, $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, $\xi \in \mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$. *При этом* $\rho(x_0, \xi) \leqslant \frac{d(y_0,\Delta_n)}{\alpha-\beta}, \xi = \xi(x_0, y_0)$.

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы 4 выполнены все условия теоремы 3. Достаточно проверить, что график $\mathrm{Graph}(F)$ является Δ_n-полным. По условиям теоремы 4 график $\mathrm{Graph}(F)$ Δ_n-замкнут и хотя бы один из графиков $\mathrm{Graph}(F_i)$, $i = 1, \ldots, n$, является полным. Пусть, например, график $\mathrm{Graph}(F_1)$ является полным. Это означает, что любая фундаментальная последовательность его элементов сходится к некоторой точке этого графика. Как в доказательстве теоремы 3, построим последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, удовлетворяющую условиям

$$d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x_k, y_k), \quad \mu(y_k, y_{k+1}) \leqslant \gamma\varphi(x_k, y_k), \quad \varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k, y_k), k = 0, 1, \ldots.$$

Здесь $y_k = (y_{1k}, \ldots, y_{nk}), y_{ik} \in F_i(x_k)$. Получаем, что последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F) = D$, а также каждая из последовательностей $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, $\{(y_{ik})\}_{k=0,1,\ldots}$, $i = 1, \ldots, n$, являются фундаментальными. Кроме того, ясно по построению, что $\varphi(x_k, y_k) := \hat{\mu}(y_k, \Delta_n) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Здесь $\hat{\mu}(y_k, \Delta_n) := \inf\limits_{z\in\Delta_n} \{\hat{\mu}(y_k, z\}$. Поскольку $\hat{\mu}(y_k, \Delta_n) := \inf\limits_{z\in Y} \{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(y_{ik}, z)\}$, то отсюда следует, что все последовательности $\{(y_{ik})\}_{k=0,1,\ldots}$, $i = 1, \ldots, n$, сближаются при $k \to \infty$. Так как график $\mathrm{Graph}(F_1)$ является полным, а последовательность $\{(x_k, y_{1k})\}_{k=0,1,\ldots}$ фундаментальна, то она сходится к некоторой точке $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(F_1)$.

Ввиду того что последовательности $\{(y_{ik})\}_{k=0,1,\ldots}$, $i = 1, \ldots, n$, сближаются, они все сходятся к η и $(\xi, \eta) \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Graph}(F_i)$. Это означает, что $\xi \in \mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$. Требуемая оценка на расстояние $d(x_0, \xi)$, как и в предыдущих теоремах, доказывается стандартно. □

2. Основные результаты. Напомним некоторые определения.

Определение 3. Пусть X — непустое множество, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется (b_1, b_2)-*квазиметрикой*, а пара (X, ρ) — (b_1, b_2)-*квазиметрическим пространством*, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены следующие условия:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$;

2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3) $\rho(x, z) \leqslant b_1\rho(x, y) + b_2\rho(y, z)$.

Определение 4. Пусть задано $s > 0$. Тогда (b_1, b_2)-квазиметрика ρ называется s-*симметрической* (*симметрической* при $s = 1$), если для любых $x, y \in X$ верно $\rho(x, y) \leqslant s\rho(y, x)$. В этом случае говорят, что X является s-*симметрическим* (*симметрическим* при $s = 1$) (b_1, b_2)-квазиметрическим пространством.

Ясно, что симметрическое $(1, 1)$-квазиметрическое пространство — это обычное метрическое пространство. Легко видеть, что коэффициенты b_1, b_2 в определении 3 не могут быть меньше 1.

В частном случае, когда $b_1 = b_2 = b$, симметрическое (b_1, b_2)-квазиметрическое пространство называется b-метрическим пространством. На b-метрические пространства был распространен принцип сжимающих отображений Банаха [6, 7]. Примеры (b_1, b_2)-квазиметрических пространств естественно возникают в исследованиях по анализу и геометрии. Целый ряд примеров таких пространств, описание их основных свойств и соответствующие подробные ссылки на литературу даны, например, в [4].

Определение 5. Последовательность $\{x_k\}$ элементов (b_1, b_2)-квазиметрического пространства (X, ρ) называется *сходящейся к элементу* $a \in X$, если $\rho(x_k, a) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Последовательность $\{x_k\}$ элементов (b_1, b_2)-квазиметрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых $n, m \in \mathbb{N}, m \geqslant n > N$, верно, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. По аналогии с обычным метрическим пространством (b_1, b_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет (хотя бы один) предел.

Определения $\{0\}$-полноты и $\{0\}$-замкнутости графика функционала $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$, а также определение (α, β)-поискового неотрицательного функционала (относительно соответствующей квазиметрики) для (b_1, b_2)-квазиметрического пространства в точности такие же, как в случае обычного метрического пространства (см. определения 1, 2).

Сформулируем и докажем аналоги приведенных выше метрических теорем для случая (b_1, b_2)-квазиметрических пространств.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для (b_1, b_2)-квазиметрического пространства.

Перед тем как ее сформулировать, заметим, что поскольку $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ и, следовательно, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \to 0$ при $k \to \infty$, то очевидно, что существует наименьший показатель k_0, такой, что для любого $k, k \geqslant k_0$, верно неравенство $b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k < 1$.

Теорема 5. *Пусть (X, ρ) — полное (b_1, b_2)-квазиметрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный (α, β)-поисковый функционал. Пусть либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ является 0-полным, либо X — полное пространство и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 0-замкнут. Тогда для каждой точки $x_0 \in X$ существует такая точка $\xi \in \mathrm{Nil}(\varphi)$, что*

$$\varliminf_{\gamma\to\xi} \rho(x_0, \gamma) \leqslant \frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\alpha\Big(1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}\Big)}\varphi(x_0). \qquad (*)$$

Если предположить, что квазиметрика ρ полунепрерывна снизу по второй переменной, то оценка $(*)$ верна для $\rho(x_0, \xi) = \varliminf_{\gamma\to\xi} \rho(x_0, \gamma)$.

Доказательство. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 1, однако с учетом особенностей (b_1, b_2)-квазиметрики ρ, отличающих ее от обычной метрики. Как и в доказательстве теоремы 1, построим последовательность точек $\{x_m\}_{m=0,1,2,\ldots}$ в X, удовлетворяющую следующим условиям: (a) $\rho(x_m, x_{m+1}) \leqslant \frac{\varphi(x_m)}{\alpha}$; (b) $\varphi(x_{m+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_m)$, причем если точка x_m уже выбрана и $\varphi(x_m) = 0$, то полагаем $x_j = x_m$ для всех $j > m$. Если же $\varphi(x_m) > 0$, то согласно условиям теоремы и определению (α, β)-поискового функционала φ (относительно квазиметрики ρ) существует точка x_{m+1}, удовлетворяющая условиям (a) и (b).

Теперь докажем фундаментальность построенной последовательности по отношению к квазиметрике ρ.[2] Прежде всего заметим, что из условий (a) и (b) следуют неравенства

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leqslant \frac{\varphi(x_m)}{\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^m \varphi(x_0). \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant b_1\rho(x_n, x_{n+1}) + b_2\rho(x_{n+1}, x_m) \leqslant b_1\rho(x_n, x_{n+1}) + b_2(b_1\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + b_2\rho(x_{n+2}, x_m)) =$$

$$= b_1\rho(x_n, x_{n+1}) + b_2b_1\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + (b_2)^2\rho(x_{n+2}, x_m)) \leqslant \ldots \leqslant b_1\rho(x_n, x_{n+1}) +$$

$$+ b_2b_1\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + b_1(b_2)^2\rho(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + (b_2)^{m-n-2}b_1\rho(x_{m-2}, x_{m-1}) + (b_2)^{m-1}\rho(x_{m-1}, x_m).$$

Пользуясь неравенствами (1), имеем

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leqslant b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n\Big[1 + b_2\frac{\beta}{\alpha} + (b_2\frac{\beta}{\alpha})^2 + \ldots + \Big(b_2\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{m-n-2} + \frac{1}{b_1}\Big(b_2\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{m-n-1}\Big].$$

Обозначим $Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k) := 1 + b_2\frac{\beta}{\alpha} + \Big(b_2\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2 + \ldots + \Big(b_2\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k-1}$. Тогда

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leqslant b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n\Big[Q\Big(b_2\frac{\beta}{\alpha}, m - n - 1\Big) + \frac{1}{b_1}\Big(b_2\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{m-n-1}\Big]. \qquad (2)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\Phi(k) := Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k - 1) + \frac{1}{b_1}(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k-1}$ и положим $\Phi(0) = 0$. Тогда из (2) имеем

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leqslant b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n\Phi(m - n). \qquad (3)$$

Поскольку $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ и, следовательно, $(\frac{\beta}{\alpha})^k \to 0$ при $k \to \infty$, то существует, как отмечено выше, такое наименьшее натуральное k_0, что для любого $k \geqslant k_0$ верно $b_2(\frac{\beta}{\alpha})^k < 1$. Используя существование этого показателя k_0 и разбивая часть построенной последовательности между точками x_n и x_m на "куски", в каждом из которых разность номеров не превосходит k_0, получаем следующие оценки для

[2]Отметим, что нижеследующее доказательство фундаментальности этой последовательности и оценки $(*)$ достаточно стандартно и поэтому вполне аналогично рассуждениям в доказательстве теоремы 4.5 работы [4], где строится похожая последовательность.

любых $n, m \in \mathbb{N}, m > n > N$. Пусть $m - n = qk_0 + r$, где r — остаток от деления $m - n$ на k_0, так что $0 \leqslant r < k_0$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant b_1\rho(x_n, x_{n+k_0}) + b_2\rho(x_{n+k_0}, x_m) \leqslant$$
$$\leqslant b_1\rho(x_n, x_{n+k_0}) + b_2b_1\rho(x_{n+k_0}, x_{n+2k_0}) + (b_2)^2\rho(x_{n+2k_0}, x_m) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant b_1\rho(x_n, x_{n+k_0}) + b_2b_1\rho(x_{n+k_0}, x_{n+2k_0}) + (b_2)^2b_1\rho(x_{n+2k_0}, x_{n+3k_0}) + \ldots$$
$$\ldots + (b_2)^{q-1}b_1\rho(x_{n+(q-1)k_0}, x_{n+qk_0}) + (b_2)^q\rho(x_{n+qk_0}, x_m). \tag{4}$$

К каждому слагаемому в неравенствах (4) применим оценки вида (3), а именно заметим, что

$$\alpha\rho(x_{n+jk_0}, x_{n+(j+1)k_0}) \leqslant b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+jk_0}\Phi(k_0), j = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Кроме того,

$$\alpha\rho(x_{n+qk_0}, x_m) \leqslant b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+qk_0}\Phi(r).$$

Тогда из (4) следует, что

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leqslant b_1b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Phi(k_0) + b_2b_1b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+k_0}\Phi(k_0) + (b_2)^2b_1b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+2k_0}\Phi(k_0) + \ldots$$
$$\ldots + b_1(b_2)^{q-1}b_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+(q-1)k_0}\Phi(k_0) + b_2^qb_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+qk_0}\Phi(r).$$

Далее имеем (используя неравенство $b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0} < 1$):

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leqslant (b_1)^2\varphi(x_0)\Phi(k_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Big[1 + b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0} + (b_2)^2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{2k_0} + \ldots$$
$$\ldots + (b_2)^{q-1}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{(q-1)k_0}\Big] + b_2^qb_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+qk_0}\Phi(r) =$$
$$= (b_1)^2\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Phi(k_0)Q(b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}, q) + b_2^qb_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+qk_0}\Phi(r) \leqslant$$
$$\leqslant (b_1)^2\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}} + b_2^qb_1\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n+qk_0}\Phi(r) =$$
$$= (b_1)^2\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Big[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}} + b_2^q\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{qk_0}(b_1)^{-1}\Phi(r)\Big] \leqslant (b_1)^2\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Big[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}} + (b_1)^{-1}\Phi(r)\Big].$$

Итак, окончательно получаем

$$\alpha\rho(x_n, x_m) \leqslant (b_1)^2\varphi(x_0)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{n}\Big[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}} + (b_1)^{-1}\Phi(r)\Big]. \tag{5}$$

Так как $(\frac{\beta}{\alpha})^n \to 0$ при $n \to \infty$, а остальное выражение в правой части (5) ограничено, то $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому последовательность $\{x_m\}$ фундаментальна, а значит, она сходится в полном пространстве (X, ρ) к некоторому элементу $\xi \in X$. Поскольку $\varphi(x_m) \to 0$, то в силу условий теоремы $\varphi(\xi) = 0$, т.е. $\xi \in \mathrm{Nil}(\varphi)$.

Далее, из неравенства (5) при $n = 0$ получается следующее неравенство:

$$\alpha\rho(x_0, x_m) \leqslant (b_1)^2\varphi(x_0)\Big[\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}} + (b_1)^{-1}\Phi(r)\Big]. \tag{6}$$

Если m делится на k_0, то $r = 0$, а значит, и $\Phi(r) = 0$ и неравенство (6) приобретает вид

$$\alpha\rho(x_0, x_m) \leqslant (b_1)^2\varphi(x_0)\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}}. \tag{7}$$

Не предполагая полунепрерывности квазиметрики ρ ни по одному из аргументов, рассмотрим подпоследовательность $\{x_{jk_0}\}$ построенной выше последовательности$\{x_m\}$. Так как, очевидно, она сходится к ξ, то получаем из неравенства (7):

$$\varliminf_{\gamma\to\xi}\rho(x_0,\gamma) \leqslant \lim_{j\to\infty}\rho(x_0, x_{jk_0}) \leqslant \alpha^{-1}(b_1)^2\varphi(x_0)\frac{\Phi(k_0)}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} =$$

$$= \alpha^{-1}(b_1)^2\varphi(x_0)\frac{Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + \frac{1}{b_1}(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}} = \frac{\alpha^{k_0-1}(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\beta)^{k_0-1}}{\alpha^{k_0} - b_2\beta^{k_0}}\varphi(x_0). \quad \square$$

Теперь рассмотрим аналог теоремы 2 для (b_1, b_2)-квазиметрических пространств.

Пусть $(X,\rho), (Y,\nu)$ — (b_1, b_2)-квазиметрические пространства.

Теорема 6. *Пусть $D \subseteq X \times Y$ — заданное замкнутое подмножество, $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный функционал. Пусть для функционала φ и чисел $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$ выполнены следующие условия. Для каждой точки $(x, y) \in D$ существует точка $(x', y') \in D$, такая, что $\rho(x, x') \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x, y)$, $\nu(y, y') \leqslant \gamma\varphi(x, y)$ и $\varphi(x', y') \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x, y)$. Пусть также либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ является 0-полным, либо D — полное пространство относительно (b_1, b_2)-квазиметрики $\bar\rho : D \times D \to \mathbb{R}_+$, определенной по правилу $\bar\rho((x, y), (x', y')) := \rho(x, x') + \nu(y, y')$, и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 0-замкнут.*

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq D$, сходящаяся к некоторой точке $(\xi, \psi) \in D$, где $\varphi(\xi, \psi) = 0$, и справедливы следующие оценки:

$$\varliminf_{w\to\xi}\rho(x_0, w) \leqslant \frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\alpha\left(1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)}\varphi(x_0, y_0). \tag{8}$$

$$\varliminf_{v\to\psi}\rho(y_0, v) \leqslant \gamma\frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\left(1 - b_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k_0}\right)}\varphi(x_0, y_0). \tag{9}$$

Доказательство. Зафиксируем начальную точку $(x_0, y_0) \in D$. Исходя из условий теоремы, можно построить начинающуюся из этой точки последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots}$, удовлетворяющую условиям $\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \alpha^{-1}\varphi(x_k, y_k)$, $\nu(y_k, y_{k+1}) \leqslant \gamma\varphi(x_k, y_k)$ и $\varphi(x_{k+1}, y_{k+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Отсюда следует, что $\bar\rho((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leqslant K\varphi(x_k, y_k)$, где $K = \alpha^{-1} + \gamma$. Поэтому имеем

$$\bar\rho((x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})) \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k K\varphi(x_0, y_0).$$

Таким образом, последовательность $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots}$, а также каждая из последовательностей $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$ являются фундаментальными. В силу условий теоремы все они сходятся к некоторым точкам $(\xi, \psi), \xi, \psi$ соответственно, причем $\varphi(\xi, \psi) = 0$. Требуемые в теореме оценки (8) и (9) доказываются вполне аналогично оценке $(*)$ в теореме 5. $\square$

Из теоремы 6 вытекает следующее утверждение, которое есть аналог теоремы 3 для (b_1, b_2)-квазиметрических пространств.

Теорема 7. *Пусть $F : X \to C(Y)$ — многозначное отображение и либо $\mathrm{Graph}(F) \subseteq X \times Y$ H-полон, где $H \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y, либо пространство $X \times Y$ полно и график $\mathrm{Graph}(F)$ H-замкнут. Пусть, кроме того, заданы числа α, β, γ, где $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, и для каждой точки $(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$ существует точка $(x', y') \in \mathrm{Graph}(F)$, для которой*

$$\rho(x, x') \leqslant \frac{\nu(y, H)}{\alpha}, \nu(y, y') \leqslant \gamma\nu(y, H), \nu(y', H) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\nu(y, H).$$

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(F)$ *существует последовательность* $\{(x_k, y_k\}_{k\in\{0\}\cup\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, $(x_k, y_k) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (\xi, \psi) \in \mathrm{Graph}(F)$, *где* $\xi \in F^{-1}(H)$, $\psi \in F(\xi) \cap H$. *Кроме того, верны оценки*

$$\varliminf_{w\to\xi} \rho(x_0, w) \leqslant \frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\alpha\Big(1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}\Big)} \nu(y_0, H);$$

$$\varliminf_{v\to\psi} \rho(y_0, v) \leqslant \gamma\frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\Big(1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}\Big)} \nu(y_0, H).$$

Доказательство. Следует рассмотреть функционал $\varphi(x, y) := \nu(y, H)$ и множество $D = \mathrm{Graph}(F)$, зафиксировать любую точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(F)$ и применить теорему 6. □

Следующая теорема есть аналог теоремы 4 для (b_1, b_2)-квазиметрических пространств. Это частный случай теоремы 7. Ниже в произведении $Y^n = Y \times \ldots \times Y$ рассматривается метрика $\hat{\nu}$, где $\hat{\nu}(y, z) := \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(y_k, z_k)$ для любых $y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in Y^n$.

Теорема 8. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$, $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$, *причем график* $\mathrm{Graph}(F)$ *отображения* F Δ_n*-замкнут и хотя бы один из графиков* $\mathrm{Graph}(F_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *является полным. Пусть числа* α, β, γ, *где* $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, *таковы, что для любых* $x \in X$, $y \in F(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y' \in F(x')$, *для которых* $\rho(x, x') \leqslant \frac{\hat{\nu}(y,\Delta_n)}{\alpha}$, $\hat{\nu}(y, y') \leqslant \gamma \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_n)$, *причем* $\hat{\nu}(y', \Delta_n) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_n)$. *Тогда для каждой точки* $(x_0, y_0) = (x_0, (y_{10}, \ldots, y_{n0})) \in \mathrm{Graph}(F)$, *т.е.* $y_{i0} \in F_i(x_0), i = 1, \ldots, n$, *существует сходящаяся последовательность* $\{(x_k, y_k)\} = \{(x_k, (y_{1k}, \ldots, y_{nk}))\}_{k=0,1,\ldots}$, *где* $x_k \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, $y_{ik} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \eta \in Y$, $i = 1, \ldots, n$, *причем точка* $(\xi, (\eta, \ldots, \eta)) \in \mathrm{Graph}(F)$, *т.е.* $\xi \in \mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n), \eta \in F_1(\xi) \cap \ldots \cap F_n(\xi)$. *Кроме того, верны оценки*

$$\varliminf_{w\to\xi} \rho(x_0, w) \leqslant \frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\alpha\Big(1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}\Big)} \nu(y_0, \Delta_n);$$

$$\varliminf_{v\to\eta} \rho(y_0, v) \leqslant \gamma\frac{(b_1)^2 Q(b_2\frac{\beta}{\alpha}, k_0 - 1) + b_1(b_2\frac{\beta}{\alpha})^{k_0-1}}{\Big(1 - b_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k_0}\Big)} \nu(y_0, \Delta_n).$$

Предложение 1. *Утверждение теоремы* 5.7 *из работы* [4] *следует из теоремы* 8 *при* $n = 2$.

Доказательство. Пусть $(X, \rho), (Y, \nu)$ — (b_1, b_2)-квазиметрические пространства. Пусть $F_1, F_2 : X \to C(Y)$ — заданные многозначные отображения, для которых выполнены условия теоремы [4, теорема 5.7], т.е. отображение F_1 является $\tilde{\alpha}$-накрывающим и замкнутым (т.е. имеет замкнутый график), а отображение F_2 является $\tilde{\beta}$-липшицевым, где $0 < \tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$, и, кроме того, хотя бы один из графиков $\mathrm{Graph}(F_1), \mathrm{Graph}(F_2)$ является полным. Покажем, что тогда выполнены все условия теоремы 8 при $n = 2$.

Покажем, что $\mathrm{Graph}(F_1 \times F_2)$ замкнут. В самом деле, так как отображение F_2 является $\tilde{\beta}$-липшицевым, то оно секвенциально полунепрерывно сверху. По этой причине для всякой сходящейся последовательности $\{(x_k, y_k)\}_{k=0,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F_2)$ верно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(y_k, F_2(\xi)) = 0$, где $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k, y_k) \in \mathrm{Graph}(F_2)$. Итак, $\mathrm{Graph}(F_2)$ замкнут, а значит, и $\mathrm{Graph}(F) = \mathrm{Graph}(F_1 \times F_2)$ замкнут. В частности, $\mathrm{Graph}(F)$ является и Δ_2-замкнутым. Пусть теперь $x \in X$ — произвольная точка и $y = (y_1, y_2) \in F(x) = (F_1 \times F_2)(x)$. Поскольку F_1 — $\tilde{\alpha}$-накрывающее отображение, то существует точка $x' \in X$, такая, что $\rho(x, x') \leqslant \frac{\nu(y_1,y_2)}{\tilde{\alpha}} = \frac{\hat{\nu}(y,\Delta_2)}{\tilde{\alpha}}$ и $y_2 \in F_1(x') \cap F_2(x)$. Тогда так как F_2 — $\tilde{\beta}$-липшицево отображение, то имеем

$$\nu(y_2, F_2(x')) \leqslant H(F_2(x), F_2(x')) \leqslant \tilde{\beta} \cdot \rho(x, x') < (\tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \cdot \delta) \cdot \rho(x, x'),$$

где δ — любое положительное число, $H(F_2(x), F_2(x')) = \max\{\sup\limits_{y\in F_2(x')} \{\nu(y, F_2(x)\}, \sup\limits_{z\in F_2(x)} \{\nu(z, F_2(x')\}\}$ — расстояние Хаусдорфа, определяемое квазиметрикой ν. Следовательно, существует точка $y_3 \in F_2(x')$, такая, что $\nu(y_2, y_3) \leqslant (\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta) \cdot \rho(x, x')$. Обозначим $y' = (y_2, y_3) \in (F_1 \times F_2)(x')$. Получаем, что

$$\hat{\nu}(y, y') = \nu(y_1, y_2) + \nu(y_2, y_3) \leqslant \nu(y_1, y_2) + (\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta) \cdot \rho(x, x') \leqslant \left(1 + \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta}{\tilde{\alpha}}\right) \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2) = \gamma \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2),$$

где $\gamma = 1 + \frac{\tilde{\beta}+\tilde{\alpha}\delta}{\tilde{\alpha}}$. Рассмотрим $\hat{\nu}(y', \Delta_2)$. Имеем $\hat{\nu}(y', \Delta_2) = \nu(y_2, y_3) \leqslant \frac{\tilde{\beta}+\tilde{\alpha}\delta}{\tilde{\alpha}} \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2)$. Взяв δ таким, чтобы $0 < \delta < 1 - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$, и обозначив $\alpha = \tilde{\alpha}, \beta = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\delta$, получаем, что $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, $\rho(x, x') \leqslant \frac{\hat{\nu}(y,\Delta_2)}{\alpha}, \nu(y, y') \leqslant \gamma \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2)$ и $\hat{\nu}(y', \Delta_2) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{\nu}(y, \Delta_2)$. Итак, все условия теоремы 8 выполнены.

Пусть теперь $x_0 \in X$ — произвольная точка и $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots} = \{(y_{1k}, y_{2k})\}_{k=0,1,\ldots}$ — последовательности, построенные в доказательстве теоремы 8 (при $n = 2$), $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, $\xi = \xi(x_0, y_0)$. В силу теоремы 8 имеем $\rho(x_0, \xi) \leqslant \frac{d(y_0,\Delta_2)}{\alpha-\beta}$, где $y_0 = (y_{10}, y_{20}) \in (F_1 \times F_2)(x_0)$. Пусть

$$\hat{\nu}(y_0, \Delta_2) = \hat{\nu}((F_1 \times F_2)(x_0), \Delta_2) \cdot (1 + \eta) = \nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot (1 + \eta),$$

где $\eta > 0$. Ясно, что в зависимости от выбора y_0 число η может быть сколь угодно малым. Тогда

$$\rho(x_0, \xi) \leqslant \frac{\nu(y_0, \Delta_2)}{\alpha - \beta} = \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot (1 + \eta)}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu)} = \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0))}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} + \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot (1 + \eta)}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu)} - \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0))}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} =$$

$$= \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot \eta}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu)} + \frac{\nu(F_1(x_0), F_2(x_0)) \cdot \beta\mu}{(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \cdot (1 + \mu))} \to 0$$

при $\mu \to 0$ и $\eta \to 0$. Отсюда видно, что ε можно сделать сколь угодно малым. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко Т.Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Матем. заметки. 2009. **86**. №1. 110–125 (*Fomenko T.N.* Approximation of coincidence points and common fixed points of a collection of mappings of metric spaces // Math. Notes. 2009. **86**, N 1. 107–120).
2. *Фоменко Т.Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Матем. заметки. 2009. **86**. №2. 304–309 (*Fomenko T.N.* Cascade search of the coincidence set of collections of multivalued mappings // Math. Notes. 2009. **86**, N 1–2. 276–281).
3. *Fomenko T.N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // Topol. and its Appl. 2010. **157**. 760–773.
4. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. **82**, №2. 3–32 (*Arutyunov A.V., Greshnov A.V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // Izv. Math. 2018. **82**, N 2. 245–272. DOI.org/10.1070/IM8546).
5. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, №1. 168–191 (*Fomenko T.N.* Fixed points and coincidences of mapping families between ordered sets and some metrical consequences // Izv. Math. 2019. **83**, N 1. 151–172. DOI.org/10.4213/im8768).
6. *Czerwik S.* Contraction mappings in b-metric spaces // Acta Math. et Inform. Univ. Ostraviensis. 1993. **1**, N 1. 5–11.
7. *Czerwik S.* Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces // Atti Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena. 1998. **46**, N 2. 263–276.

Поступила в редакцию
18.04.2019