СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lima A.A.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. **227**. 1–62.
2. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Can. J. Math. 1955. **7**, N 4. 552–561.
3. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. **48**. 1–112.
4. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. **205**, № 4. 3–19.
5. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. **207**, № 8. 31–46.
6. *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. № 6. 26–31.
7. *Беднов Б.Б., Бородин П.А., Чеснокова К.В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // Матем. сб. 2018. **209**, № 2. 3–21.

Поступила в редакцию
20.02.2019

УДК 512.813.52+517.955.4+517.983.37+517.987.4+519.216.22

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ИНТЕГРАЛ ВИНЕРА

С. В. Мамон[1]

Изучаются вопросы, связанные с приложениями функциональных интегралов к эволюционным уравнениям, в частности с нахождением представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на трехпараметрической группе Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$ в виде интеграла Винера в пространстве траекторий из $C[0,t] \times C[0,t]$.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, интеграл Винера, сублапласиан, марковский процесс на группе Гейзенберга, однопараметрическая полугруппа операторов, производящий оператор полугруппы, формула Фейнмана–Каца.

The issues related to applications of functional integrals to evolution equations are studied. In particular, this is the problem of representation of solutions to the Cauchy problem for the heat equation in the three-parameter Heisenberg group $H_3(\mathbb{R})$ in terms of Wiener integral in the space of trajectories from $C[0,t] \times C[0,t]$.

Key words: Heisenberg group, Wiener integral, sub-Laplacian, Markov process in Heisenberg group, one-parameter semigroup of operators, infinitesimal operator of semigroup, Feynman–Kac formula.

В 1976 г. А. Хиланикья в работе [1], а затем в 1977 г. Б. Гаво в работе [2] вычислили тепловое ядро, отвечающее сублапласиану на группе Гейзенберга $H_{2n+1}(\mathbb{R})$, с применением техники преобразования Фурье. Также вопрос о нахождении теплового ядра на $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ рассматривался у С. Ватанабе в работе [3], где оно находилось с использованием исчисления Маллявена. В работе автора [4] было показано, как это тепловое ядро может быть вычислено с помощью свойств дельта-функции Дирака в комбинации с идеей интегрирования относительно меры Винера на множестве траекторий двумерного винеровского процесса на $\mathbb{R}^2$. Для этого был рассмотрен случайный процесс $\mathbf{r}(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau), z^+(\tau)\big)$, где $x(\tau), y(\tau)$ — независимые винеровские процессы, а $z^+(\tau)$ — ориентированная площадь на плоскости Oxy, заметаемая радиусом-вектором с координатами $\big(x(\tau), y(\tau)\big)$. Было получено представление переходной плотности этого процесса в виде интеграла Винера в пространстве $C[0,t] \times C[0,t]$. Далее, с помощью этого представления была установлена гейзенберговская

[1] *Мамон Сергей Владимирович* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sergey.mamon.msu@yandex.ru.

Mamon Sergei Vladimirovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

марковость процесса $\mathbf{r}(\tau)$, а также через интеграл Винера было выражено решение задачи Коши для параболического уравнения, соответствующего сублапласиану на группе $H_3(\mathbb{R})$. При этом решение было найдено автором только для специального случая, когда потенциальная функция V зависела от двух переменных, соответствующих винеровским траекториям $x(\tau)$ и $y(\tau)$, т.е. для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{x^2+y^2}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Big)-V(x,y)u.$$

Это решение имело следующий вид:

$$u(X,Y,Z,t)=\iint\limits_{\substack{C[0,t]\times C[0,t]\\ x(0)=0,\,y(0)=0}}\psi_0\Big(x(t)+X,\,y(t)+Y,\,Z+\frac{1}{2}\big[y(t)X-x(t)Y\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)dy(\tau)-y(\tau)dx(\tau)\Big)\exp\Big\{-\int\limits_0^t V\big(x(\tau)+X,y(\tau)+Y\big)d\tau\Big\}d_Wx\,d_Wy,$$

где W — мера Винера на множестве непрерывных функций $\xi(t)$, удовлетворяющих условию $\xi(0)=0$. В настоящей работе получено представление этого решения в общем случае, когда $V=V(x,y,z)$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{x^2+y^2}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Big)-V(x,y,z)u \tag{1}$$

в области $G_T=\big\{x,y,z\in\mathbb{R},\ 0<t<\infty\big\}$, где функция $V(x,y,z)$ непрерывна и ограничена снизу на $\mathbb{R}^3$, в классе $u(x,y,z,t)\in C^{2,1}(G_T)\cap C(\overline{G_T})$ рассматривается задача Коши с начальной функцией $u(x,y,z,0)=\psi_0(x,y,z)\in C(\mathbb{R}^3)$, $\|\psi_0\|_C<\infty$. Тогда ее решение предоставляет общий вид однопараметрической полугруппы операторов, производящий оператор H которой дается выражением в правой части (1), а действие на функцию ψ_0 выражается с помощью интеграла Винера следующим образом:

$$\big(e^{-Ht}\psi_0\big)(X,Y,Z,t)=u\big(X,Y,Z,t\big)=$$

$$=\iint\limits_{\substack{C[0,t]\times C[0,t]\\ x(0)=0,\,y(0)=0}}\psi_0\Big(x(t)+X,\,y(t)+Y,\,\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)dy(\tau)-y(\tau)dx(\tau)-\frac{1}{2}\big[x(t)Y-y(t)X\big]+Z\Big)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^t V\Big(x(\tau)+X,y(\tau)+Y,\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau x(s)dy(s)-y(s)dx(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\big[x(\tau)Y-y(\tau)X\big]+Z\Big)d\tau\Big\}d_Wx\,d_Wy.$$

Доказательство. Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $u\big(X,Y,Z,t\big)$. Подобно тому, как это делалось в статье [4], запишем сначала выражение для $u\big(X,Y,Z,t+\Delta t\big)$. Будем иметь

$$u(X,Y,Z,t+\Delta t)=$$

$$=\iint\limits_{C[0,t+\Delta t]\times C[0,t+\Delta t]}\psi_0\Big(\xi(t+\Delta t)+X,\,\eta(t+\Delta t)+Y,\,\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\xi(\tau)d\eta(\tau)-\eta(\tau)d\xi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\big[\xi(t+\Delta t)Y-\eta(t+\Delta t)X\big]+Z\Big)\exp\Big\{-\int\limits_0^{t+\Delta t}V\Big(\xi(\tau)+X,\eta(\tau)+Y,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \xi(s)d\eta(s)-\eta(s)d\xi(s)-\frac{1}{2}\big[\xi(\tau)Y-\eta(\tau)X\big]+Z\Big)d\tau\Big\}d_W\xi d_W\eta.$$

Далее, разобьем отрезок $[0,t+\Delta t]$ на два непересекающихся участка $[0,\Delta t]$ и $(\Delta t, t+\Delta t]$. Параметр τ на отрезке $[0,\Delta t]$ будем обозначать через τ_1. Траектории $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ при $\tau\in[0,\Delta t]$ будем обозначать через $\xi'(\tau_1)$ и $\eta'(\tau_1)$ соответственно. Если же $\tau\in(\Delta t,t+\Delta t]$, то справедливо следующее представление:

$$\xi(\tau)=\xi(\tau)-\xi'(\Delta t)+\xi'(\Delta t)=\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t),$$
$$\eta(\tau)=\eta(\tau)-\eta'(\Delta t)+\eta'(\Delta t)=\eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t),\ \ \tau_2=\tau-\Delta t\in(0,t],$$

где через $\xi''(\tau_2)$ и $\eta''(\tau_2)$ обозначены траектории процессов $W_1(\tau)-W_1(\Delta t)$ и $W_2(\tau)-W_2(\Delta t)$, распределенных как $W_1(\tau-\Delta t)$ и $W_2(\tau-\Delta t)$ и независимых от процессов $W_1(\Delta t)$ и $W_2(\Delta t)$ соответственно с траекториями $\xi'(\Delta t)$ и $\eta'(\Delta t)$. В частности, справедливы равенства

$$\xi(t+\Delta t)=\xi''(t)+\xi'(\Delta t),\ \ \eta(t+\Delta t)=\eta''(t)+\eta'(\Delta t). \tag{2}$$

Раскладывая теперь криволинейный интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\xi(\tau)d\eta(\tau)-\eta(\tau)d\xi(\tau)$$

в сумму двух интегралов на $[0,\Delta t]$ и $(\Delta t,t+\Delta t]$, выполняя во втором интеграле замену $\tau=\tau_2+\Delta t$ и пользуясь равенствами (2), получим, что он преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\xi(\tau)d\eta(\tau)-\eta(\tau)d\xi(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)d\xi'(\tau_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\xi''(\tau_2)d\eta''(\tau_2)-\eta''(\tau_2)d\xi''(\tau_2)+\frac{1}{2}\big[\xi'(\Delta t)\eta''(t)-\eta'(\Delta t)\xi''(t)\big].$$

Эту же самую процедуру проделаем для множителя, содержащего функцию V. Получим, что он распадается на два сомножителя, первый из которых есть

$$\exp\Big\{-\int\limits_0^{\Delta t}V\Big(\xi'(\tau_1)+X,\,\eta'(\tau_1)+Y,\,\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_1}\xi'(s_1)d\eta'(s_1)-\eta'(s_1)d\xi'(s_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\big(\xi'(\tau_1)Y-\eta'(\tau_1)X\big)+Z\Big)d\tau_1\Big\}. \tag{3}$$

Во втором сделаем замену переменной $\tau=\tau_2+\Delta t$ и, вновь используя равенства (2), получим для интеграла, стоящего в показателе экспоненты, следующую цепочку:

$$\int\limits_{\Delta t}^{t+\Delta t}V\Big(\xi(\tau)+X,\,\eta(\tau)+Y,\,\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}\xi(s_2)d\eta(s_2)-\eta(s_2)d\xi(s_2)-\frac{1}{2}\big[\xi(\tau)Y-\eta(\tau)X\big]+Z\Big)d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t}V\Big(\xi(\tau_2+\Delta t)+X,\ \eta(\tau_2+\Delta t)+Y,\ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_2+\Delta t}\xi(s_2)d\eta(s_2)-\eta(s_2)d\xi(s_2)-$$

$$-\frac{1}{2}\big[\xi(\tau_2+\Delta t)Y-\eta(\tau_2+\Delta t)X\big]+Z\Big)d\tau_2=$$

$$= \int\limits_0^t V\Big(\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t)+X,\ \eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t)+Y,\ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)d\xi'(\tau_1)d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta t}^{\tau_2+\Delta t}\xi(s_2)d\eta(s_2)-\eta(s_2)d\xi(s_2)-\frac{1}{2}\big[(\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t))Y-(\eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t))X\big]+Z\Big)d\tau_2. \qquad (4)$$

В интеграле по отрезку $[\Delta t, \tau_2+\Delta t]$ снова сделав замену $s_2=\tau_3+\Delta t$, запишем его в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_2}\xi''(\tau_3)d\eta''(\tau_3)-\eta''(\tau_3)d\xi''(\tau_3)+\frac{1}{2}\big[\xi'(\Delta t)\eta''(\tau_2)-\eta'(\Delta t)\xi''(\tau_2)\big]. \qquad (5)$$

Учитывая теперь выражения (3)–(5), а также независимость друг от друга траекторий ξ'', η'' и ξ', η' соответственно, получим, что функция $u\big(X,Y,Z,t+\Delta t\big)$ представляется в виде следующего двойного интеграла по плоской мере Винера:

$$\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\ \iint\limits_{C[0,t]\times C[0,t]}\psi_0\Big(\xi''(t)+\xi'(\Delta t)+X,\ \eta''(t)+\eta'(\Delta t)+Y,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\xi''(\tau_2)d\eta''(\tau_2)-\eta''(\tau_2)d\xi''(\tau_2)-\frac{1}{2}\big[\xi''(t)(\eta'(\Delta t)+Y)-\eta''(t)(\xi'(\Delta t)+X)\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)d\xi'(\tau_1)-\frac{1}{2}\big[\xi'(\Delta t)Y-\eta'(\Delta t)X\big]+Z\Big)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{\Delta t}V\Big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_1}\xi'(s_1)d\eta'(s_1)-\eta'(s_1)d\xi'(s_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\big(\xi'(\tau_1)Y-\eta'(\tau_1)X\big)+Z\Big)d\tau_1\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^t V\Big(\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t)+X,\eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t)+Y,\ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_2}\xi''(\tau_3)d\eta''(\tau_3)-\eta''(\tau_3)d\xi''(\tau_3)-$$

$$-\frac{1}{2}\big[\xi''(\tau_2)(\eta'(\Delta t)+Y)-\eta''(\tau_2)(\xi'(\Delta t)+X)\big]+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)d\xi'(\tau_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\big[\xi'(\Delta t)Y-\eta'(\Delta t)X\big]+Z\Big)d\tau_2\Big\}d_W\xi' d_W\eta' d_W\xi'' d_W\eta''. \qquad (6)$$

Для того чтобы было проще и нагляднее показать, как согласуется полученное выражение (6) с представлением функции $u\big(X,Y,Z,t\big)$ в формулировке теоремы, введем следующее обозначение:

$$S\big(\xi(t),\eta(t),X,Y\big)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\xi(\tau)d\eta(\tau)-\eta(\tau)d\xi(\tau)-\frac{1}{2}\big[\xi(t)Y-\eta(t)X\big].$$

В этих обозначениях интеграл (6) запишется в виде

$$\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\ \iint\limits_{C[0,t]\times C[0,t]}\psi_0\Big(\xi''(t)+\xi'(\Delta t)+X,\ \eta''(t)+\eta'(\Delta t)+Y,$$

$$S\big(\xi''(t),\eta''(t),\xi'(\Delta t)+X,\eta'(\Delta t)+Y\big)+S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z\Big)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{\Delta t}V\Big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)+gZ\Big)d\tau_1\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{t}V\Big(\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t)+X,\eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t)+Y,$$

$$S\big(\xi''(\tau_2),\eta''(\tau_2),\xi'(\Delta t)+X,\eta'(\Delta t)+Y\big)+S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z\Big)d\tau_2\Big\}\times$$

$$\times d_W\xi''d_W\eta''d_W\xi'd_W\eta', \tag{7}$$

а функция $u\big(X,Y,Z,t\big)$, фигурирующая в формулировке теоремы, — в виде

$$u(X,Y,Z,t)=\iint\limits_{C[0,t]\times C[0,t]}\psi_0\big(\xi(t)+X,\ \eta(t)+Y,\ S\big(\xi(t),\eta(t),X,Y\big)+Z\big)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{t}V\big(\xi(\tau)+X,\ y(\tau)+Y,\ S\big(\xi(\tau),\eta(\tau),X,Y\big)+Z\big)d\tau\Big\}d_W\xi d_W\eta. \tag{8}$$

Теперь, сопоставляя представления (7) и (8), уже несложно понять, что в (7) можно проинтегрировать по траекториям ξ'' и η'', в результате чего для $u\big(X,Y,Z,t+\Delta t\big)$ будем иметь представление

$$\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}u\big(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,\ S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z,t\big)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{\Delta t}V\big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)+Z\big)d\tau_1\Big\}d_W\xi'd_W\eta'.$$

Вычитая теперь из этого выражения $u\big(X,Y,Z,t\big)$ и разлагая в ряды последовательно сначала экспоненту, а затем функцию

$$u\big(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,\ S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z,t\big)$$

в окрестности точки (X,Y,Z,t), получим следующую цепочку:

$$\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\Big\{u\big(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,\ S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z,t\big)\times$$

$$\times\Big(1-\int\limits_0^{\Delta t}V\big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)+Z\big)d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{2!}\Big(\int\limits_0^{\Delta t}V\big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)+Z\big)d\tau_1\Big)^2-\ldots\Big)-$$

$$-u\big(X,Y,Z,t\big)\Big\}d_W\xi'd_W\eta'=\frac{\partial u}{\partial x}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\xi'(\Delta t)d_W\xi'd_W\eta'+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\eta'(\Delta t)d_W\xi' d_W\eta' + \frac{\partial u}{\partial z}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]} S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)d_W\xi' d_W\eta' +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\big(\xi'(\Delta t)\big)^2 d_W\xi' d_W\eta' + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\big(\eta'(\Delta t)\big)^2 d_W\xi' d_W\eta +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\Big(S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)\Big)^2 d_W\xi' d_W\eta' +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\xi'(\Delta t)\eta'(\Delta t)d_W\xi' d_W\eta' +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\xi'(\Delta t)S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)d_W\xi' d_W\eta' +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\eta'(\Delta t)S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)d_W\xi' d_W\eta' + \ldots -$$

$$-\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]} u\big(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,\ S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z,t\big)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\Delta t} V\big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)+Z\big)d\tau_1 d_W\xi' d_W\eta' +$$

$$+\frac{1}{2!}\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]} u\big(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,\ S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+Z,t\big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^{\Delta t} V\big(\xi'(\tau_1)+X,\ \eta'(\tau_1)+Y,\ S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)+Z\big)d\tau_1\Big)^2 d_W\xi' d_W\eta' - \ldots .$$

Предпоследнее слагаемое в этой сумме имеет вид

$$\iint\limits_{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]}\bigg(u\big(X,Y,Z,t\big)+\frac{\partial u}{\partial x}\xi'(\Delta t)+\frac{\partial u}{\partial y}\eta'(\Delta t)+\frac{\partial u}{\partial z}S\big(\xi'(\Delta t),\eta'(\Delta t),X,Y\big)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big(\xi'(\Delta t)\big)^2+\ldots\bigg)\cdot\bigg(V\big(X,Y,Z\big)\Delta t+\frac{\partial V}{\partial x}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)d\tau_1+\frac{\partial V}{\partial y}\int\limits_0^{\Delta t}\eta'(\tau_1)d\tau_1+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial z}\int\limits_0^{\Delta t}S\big(\xi'(\tau_1),\eta'(\tau_1),X,Y\big)d\tau_1+\frac{1}{2!}\int\limits_0^{\Delta t}\big(\xi'(\tau_1)\big)^2 d\tau_1+\ldots\bigg)d_W\xi' d_W\eta' =$$

$$= u\big(X,Y,Z,t\big)V\big(X,Y,Z\big)\Delta t + o(\Delta t). \tag{9}$$

Остальные слагаемые в сумме (9) начиная с последнего имеют порядок относительно Δt, превосходящий единицу. Остальные винеровские интегралы, фигурирующие в равенстве (9), либо равны нулю, либо являются величинами порядка Δt. Вычисляя их, а затем деля равенство (9) на Δt и переходя в полученном соотношении к пределу при $\Delta t \to 0$, заключаем, что функция $u\big(X,Y,Z,t\big)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{x^2+y^2}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Big)-V(x,y,z)u,$$

что завершает доказательство теоремы.

Автор приносит благодарность научному руководителю Е. Т. Шавгулидзе за постановку задачи и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hulanicki A.* The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field // Stud. math. 1976. **56**, N 2. 165–173.
2. *Gaveau B.* Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents // Acta math. 1977. **139**, N 1–2. 95–153.
3. *Vatanabe S.* Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and it's applications to heat kernels // Ann. Probab. 1987. **15**, N 1. 1–39.
4. *Мамон С.В.* Мера Винера на группе Гейзенберга и параболические уравнения // Фунд. и прикл. матем. 2016. **21**, № 4. 67–98.

Поступила в редакцию
26.09.2016
После доработки
26.09.2018

УДК 515.124, 515.126.4, 512.562

ПОИСК НУЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛОВ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. Н. Фоменко[1]

Доказаны принцип поиска нулей (α, β)-поисковых функционалов и вытекающие из него теоремы о неподвижных точках и совпадениях наборов однозначных и многозначных отображений (b_1, b_2)-квазиметрических пространств. Полученные теоремы являются развитием установленных ранее автором результатов для метрических пространств. В частности, получено обобщение недавнего результата о совпадениях накрывающего и липшицева отображений (b_1, b_2)-квазиметрических пространств.

Ключевые слова: (b_1, b_2)-квазиметрическое пространство, (α, β)-поисковый функционал, неподвижная точка, точка совпадения.

The cascade search principle for zeros of (α, β)-search functionals and consequent fixed point and coincidence theorems are proved for collections of single-valued and set-valued mappings of (b_1, b_2)-quasimetric spaces. These results are extensions of some previous author's results in metric spaces. In particular, a generalization is obtained for some recent result on coincidences of a covering mapping and a Lipshitzian mappings of (b_1, b_2)-quasimetric spaces.

Key words: (b_1, b_2)-quasimetric space, (α, β)-search functional, fixed point, coincidence point.

1. Введение и предварительные сведения. Полезным методом исследования функционалов, заданных на метрическом пространстве, является принцип поиска нулей так называемых (α, β)-поисковых функционалов, разработанный в [1–3]. Важность этого принципа заключается и в том, что из него получается целый ряд теорем о существовании неподвижных точек, точек совпадения наборов отображений (как однозначных, так и многозначных) метрических пространств, а также теорем о существовании прообразов заданного подпространства метрического пространства, представленных в [1–3].

[1] *Фоменко Татьяна Николаевна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей математики ф-та ВМК МГУ, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

Fomenko Tatiana Nikolaevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.