Математика

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА ЧЕТЫРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНДЕНШТРАУССА

Б. Б. Беднов[1]

Исследуется связь множества точек Штейнера четырехэлементного множества с множеством точек Штейнера трехэлементного подмножества в предуальных к L_1 пространствах. Предъявлена липшицева выборка из отображения, сопоставляющего четверке непрерывных на хаусдорфовом компакте функций их множество точек Штейнера.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка.

We study the connection between the set of Steiner points for a four-element set and the set of Steiner points for a three-element subset in L_1-predual spaces. A Lipschitz selection is presented for the mapping from fours of continuous functions on a Hausdorff compact set to the set of their Steiner points.

Key words: Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан) $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M_n).$$

Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством n.2.I.P. (n.2 Intersection Property [1]), если всякие n попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

Теорема A (А. Гротендик [2], Й. Линденштраусс [3], см. также [1]). *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) *X обладает свойством* n.2.I.P. *для всякого $n \geqslant 3$;*

(2) *X обладает свойством* 4.2.I.P.*;*

(3) *X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ;*

(4) *X^{**} 1-дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве Z (т.е. существует линейный проектор $P : Z \to X^{**}$ нормы 1).*

Пространства, удовлетворяющие условиям теоремы A, называются предуальными к L_1 или пространствами Линденштраусса. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие.

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ непусто [4] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M_n)$ можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a, b] = \{x \in X : \|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|\}$). Точнее, верна

Теорема B [5]. *Пусть пространство X предуально к L_1. Для множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ из X имеет место формула*

$$|\mathrm{st}|(M) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^{k} L(N_j) : N_1 \cup \ldots \cup N_k = M \right\},$$

[1] *Беднов Борислав Борисович* — канд. физ.-мат. наук, переводчик-секретарь каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; доцент каф. ФН-12 "Математическое моделирование" МГТУ им. Н. Э. Баумана; доцент каф. высшей математики, механики и математического моделирования Сеченов. ун-та, e-mail: noriiii@inbox.ru.

Bednov Borislav Borisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, translator-referent, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Associated Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Fundamental Sciences-12 "Mathematical Modeling"; Associated Professor, Sechenov University, Chair of Higher Mathematics, Mechanics and Mathematical Modeling.

где максимум берется по всем не менее чем двухточечным подмножествам $N_j \subset M$, причем если точка x_i имеет кратность p_i в множестве M, то x_i содержится в p_i различных множествах из $\{N_j\}_{j=1}^k$. Число $L(N_j)$ обозначает максимальную сумму длин ребер цикла, обходящего все вершины из N_j по одному разу. При этом

$$\mathrm{st}(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{st}(N_j^*) = \bigcap m[x_p, x_q], \tag{1}$$

где $\{N_j^*\}_{j=1}^k$ — такие не менее чем двухточечные подмножества множества M, для которых $\sum_{j=1}^k L(N_j^*) = 2|\mathrm{st}|(M)$, а последнее пересечение берется по тем парам индексов p, q, для которых $x_p, x_q \in N_j^*$ соединены ребром в цикле с длиной $L(N_j^*)$, обходящем множество N_j^*, $j = 1, \ldots, k$.

Заметим, что для двухточечного множества N_j цикл состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

Можно считать [5], что множества N_j из теоремы B — элементы разбиения множества M — состоят либо из нечетного количества точек, либо всего из двух. Поэтому для четырехточечного множества M_4 разбиение $\{N_j\}$ состоит из пары двухэлементных подмножеств.

Следствие 1. *Пусть пространство X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$. Тогда*

$$|\mathrm{st}|(M_4) = \max\{\|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\|, \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_4\|, \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|\} =: \max(M_4).$$

Если $\max(M_4) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$, то экстремальное разбиение $\{N_j^*\}$ множества M_4 (возможно, не единственное) состоит из $\{x_1, x_4\}$ и $\{x_2, x_3\}$, при этом $\mathrm{st}(M_4) = m[x_1, x_4] \cap m[x_2, x_3]$.

Если экстремальное разбиение множества M не содержит двухэлементных множеств, то, используя первое равенство формулы (1), можно однозначно вычислить расстояния от каждого элемента множества M до (произвольной) точки $s \in \mathrm{st}(M)$ при помощи леммы 8 работы [5]. Если же экстремальное разбиение множества M содержит двухэлементное множество $\{x, y\}$, то, вообще говоря, расстояние $\|x - s\|$ определено неоднозначно при $s \in \mathrm{st}(M)$.

Цель настоящей работы — определить спектр значений величины $\|x_1 - s\|$, где $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, и полностью охарактеризовать множество $\mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ через пересечение сфер в предуальном к L_1 пространстве, а также построить липшицеву выборку из отображения $\mathrm{St}_4 : M_4 \to \mathrm{st}(M_4)$ в пространстве действительнозначных непрерывных функций $C[K]$ на хаусдорфовом компакте K.

1. Нам понадобится описание множества $\mathrm{st}(M_3)$ в предуальном к L_1 пространстве.

Лемма B [6, 5]. *Пусть пространство X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3 \in X$. Тогда*

$$\mathrm{st}(x_1, x_2, x_3) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap m[x_3, x_1] = \cap_{i=1}^3 S(x_i, r_i),$$

где $r_i =: \frac{1}{2}(\|x_j - x_i\| + \|x_k - x_i\| - \|x_k - x_j\|)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Таким образом, для каждой точки $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$ в предуальном к L_1 пространстве верно равенство $\|x_1 - s\| + \|x_2 - s\| = \|x_1 - x_2\|$.

Пусть $r_i^{(jk)} = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$. Это расстояние от точки x_i до (любой) точки $s \in \mathrm{st}(x_i, x_j, x_k)$, что следует из леммы B. Обозначим $r_i^m = \min\{r_i^{(jk)} \mid \{j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}\}$.

Лемма 1. *Пусть пространство X предуально к L_1, $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Тогда $r_1^m = r_1^{(23)}$.*

Действительно, если множество $\{x_1, x_j, x_k\}$ отлично от $\{x_1, x_2, x_3\}$, то считаем $j = 4$, $k \in \{2, 3\}$, $\{p\} = \{2, 3\} \setminus \{k\}$. Тогда $2r_1^{(4k)} = \|x_1 - x_4\| + \|x_1 - x_k\| - \|x_4 - x_k\|$, $2r_1^{(23)} = \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| - \|x_2 - x_3\|$. Преобразуя эти две величины, приходим к сравнению $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$ и $\|x_1 - x_p\| + \|x_k - x_4\|$, т.е. $r_1^{(4k)} \geqslant r_1^{(23)}$.

Замечание 1. Треугольник $x_1 x_2 x_3$ в лемме 1 определяется тем, что длина стороны, противолежащей x_1, содержится как слагаемое в выражении $\max(M_4)$.

Лемма 2. *Пусть пространство X предуально к L_1, $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Тогда существует точка $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3) \cap \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.*

Доказательство. Обозначим $r_1 = r_1^{(23)}$, $r_2 = r_2^{(13)} = \|x_1 - x_2\| - r_1$, $r_3 = \|x_2 - x_3\| - r_2 = \|x_1 - x_3\| - r_1 = r_3^{(12)}$ (числа из леммы B) и $r_4 = \|x_1 - x_4\| - r_1$. Докажем, что сферы $S(x_i, r_i)$ попарно пересекаются. Достаточно проверить выполнение неравенств $r_2 + r_4 \geqslant \|x_2 - x_4\|$ и $r_3 + r_4 \geqslant \|x_3 - x_4\|$, так как остальные неравенства обращаются в равенства в силу леммы B и выбора числа r_4.

Сумма $r_3 + r_4 = \|x_1 - x_4\| - \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\|$ не меньше $\|x_3 - x_4\|$ ввиду условия для $\max(M_4)$. Аналогично $r_2 + r_4 = \|x_1 - x_4\| - \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_3\| \geqslant \|x_2 - x_4\|$.

Таким образом, все неравенства треугольника для радиусов сфер выполнены, поэтому сферы $S(x_i, r_i)$, а значит, и шары $B(x_i, r_i)$ попарно пересекаются. Следовательно, в силу свойства п.2.I.P. пространства X множество $\cap_{i=1}^4 B(x_i, r_i)$ непусто. По лемме В пересечение шаров $\cap_{i=1}^3 B(x_i, r_i)$ есть пересечение сфер $\cap_{i=1}^3 S(x_i, r_i)$, поэтому $\cap_{i=1}^4 B(x_i, r_i) \subset \cap_{i=1}^3 S(x_i, r_i)$. К тому же $B(x_1, r_1) \cap B(x_4, r_4) = S(x_1, r_1) \cap S(x_4, r_4)$. Поэтому пересечение сфер $\cap_{i=1}^4 S(x_i, r_i)$ непусто и существует точка $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3) \cap S(x_4, r_4)$. При этом $\|x_1 - s\| + \|x_2 - s\| + \|x_3 - s\| + \|x_4 - s\| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$, т.е. $s \in \mathrm{st}(M_4) = m[x_1, x_4] \cap m[x_2, x_3]$.

Лемма доказана.

Замечание 2. В условиях леммы 2 для точки s выполнены равенства

$$\|x_1 - s\| = r_1^m,\ \|x_i - s\| = \|x_1 - x_i\| - r_1^m,\ i = 2, 3, 4.$$

Следствие 2. *Пусть пространство X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3 \in X$. Для произвольной точки $x_4 \in X$ найдется такая точка $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$, что $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.*

Действительно, длина одной из сторон треугольника $x_1x_2x_3$ будет содержаться как слагаемое в $\max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$. Без ограничения общности считаем, что это x_2x_3. Тогда применима лемма 2.

Лемма 3. *Пусть пространство X предуально к L_1, $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$. Наименьшее значение $\|x_1 - s\|$ при $s \in \mathrm{st}(M_4)$ равно r_1^m.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем $\max(M_4) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$. Тогда по лемме 1 имеем $r_1^m = r_1^{(23)}$. Для точки $s \in \mathrm{st}(M_4) \cap \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3)$ (из леммы 2) расстояние $\|x_1 - s\|$ равно r_1^m. Обозначим $\|x_i - s\| = r_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим точку s_0 с условием $\|s_0 - x_1\| < r_1^m$. Тогда $\|x_2 - s_0\| > r_2$ и $\|x_3 - s_0\| > r_3$ по замечанию 2, т.е. $\|x_2 - s_0\| + \|x_3 - s_0\| > \|x_2 - x_3\| = r_2 + r_3$. При этом $\|x_4 - s_0\| \geqslant \|x_1 - x_4\| - \|x_1 - s_0\|$. Следовательно, $\sum_{i=1}^4 \|x_i - s_0\| > r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$, т.е. $s_0 \notin \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть пространство X предуально к L_1, $M_4 \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Наибольшее расстояние от точки x_1 до множества $\mathrm{st}(M_4)$ достигается для точки $s \in \mathrm{st}(x_4, x_2, x_3) \cap \mathrm{st}(M_4)$.*

Действительно, наименьшее расстояние от точки x_4 до множества $\mathrm{st}(M_4)$ реализуется на s по лемме 3, а сумма норм $\|x_1 - s'\| + \|x_4 - s'\|$ одна и та же для всех точек $s' \in \mathrm{st}(M_4)$ в силу условия для $\max(M_4)$, поскольку $\mathrm{st}(M_4) \subset m[x_1, x_4]$.

Теорема 1. *Пусть пространство X предуально к L_1, $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$, $s \in \mathrm{st}(M_4)$. Тогда (а) множество значений величины $\|x_1 - s\|$ есть отрезок $[r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$; (б) при фиксированном числе $R_1 = \|x_1 - s\| \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ множество значений величины $\|x_2 - s\| = R_2$ есть отрезок $[A, B]$, где*

$$A = A(R_1) = \max\{\|x_1 - x_2\| - R_1, \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1\},$$

$$B = B(R_1) = \min\{\|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1, \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $s \in \mathrm{st}(M_4)$. Обозначим $R_i = \|x_i - s\|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Напомним, что $R_1 + R_4 = \|x_1 - x_4\|$, $R_2 + R_3 = \|x_2 - x_3\|$ в силу условия на $\max(M_4)$. По лемме 3 и следствию 3 имеем $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$. Заметим, что $R_2 \geqslant \|x_1 - x_2\| - R_1$, $R_2 \geqslant \|x_4 - x_2\| - R_4 = \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1$, т.е. $R_2 \geqslant A(R_1)$. Далее, $R_2 = \|x_2 - x_3\| - R_3$ и $R_3 \geqslant \|x_1 - x_3\| - R_1$, $R_3 \geqslant \|x_4 - x_3\| - R_4 = \|x_4 - x_3\| - \|x_4 - x_1\| + R_1$, откуда $R_2 \leqslant \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1$ и $R_2 \leqslant \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1$, т.е. $R_2 \leqslant B(R_1)$.

(а) Зафиксируем число $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$. Докажем, что для числа $R_2 = A(R_1)$ существует такая точка $s \in \mathrm{st}(M_4)$, что $\|x_i - s\| = R_i$, $i = 1, 2$. Для этого достаточно проверить, что сферы $S(x_i, R_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, имеют попарно непустое пересечение при $R_3 = \|x_2 - x_3\| - R_2$, $R_4 = \|x_1 - x_4\| - R_1$ в силу выбора $\max(M_4)$. Проверим выполнение неравенств $R_i + R_j \geqslant \|x_i - x_j\|$, $i = 1, 4$, $j = 2, 3$.

1) Если $A = \|x_1 - x_2\| - R_1$, то $R_1 + R_2 = \|x_1 - x_2\|$, $R_1 + R_3 = R_1 + \|x_2 - x_3\| - R_2 = 2R_1 + \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_2\| \geqslant 2r_1^m + \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_3\|$. При этом $R_4 + R_2 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + A \geqslant \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_4\| - \|x_1 - x_4\| + R_1 = \|x_2 - x_4\|$, $R_4 + R_3 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_2\| + R_1 \geqslant \|x_3 - x_4\|$ (по определению $\max(M_4)$).

2) Если же $A = \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1$, то $R_1 + R_2 \geqslant R_1 + \|x_1 - x_2\| - R_1 = \|x_1 - x_2\|$, $R_1 + R_3 = R_1 + \|x_2 - x_3\| - A = \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_2\| + \|x_4 - x_1\| \geqslant \|x_1 - x_3\|$ (в силу определения $\max(M_4)$), $R_4 + R_2 = \|x_4 - x_2\|$. Далее нетрудно проверить, что при фиксированном $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ отрезок $[A(R_1), B(R_1)]$ непуст, т.е. $A \leqslant B$. Для доказательства неравенства $R_4 + R_3 \geqslant \|x_3 - x_4\|$ воспользуемся оценкой $A \leqslant B = \min\{\|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1, \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1\} \leqslant$

$\|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + R_4$. Поэтому $R_4 + R_3 = R_4 + \|x_2 - x_3\| - R_2 \geqslant R_4 + \|x_2 - x_3\| - \|x_2 - x_3\| + \|x_3 - x_4\| - R_4 = \|x_3 - x_4\|$.

Таким образом, для каждого числа $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ найдутся такие числа R_2, R_3, R_4, что $\cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i) \neq \varnothing$ и $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 + x_3\| = |\mathrm{st}|(M_4)$. Поэтому для точки (возможно, не единственной) $s \in \cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i)$ выполнены условия $\|x_i - s\| = R_i$ и $s \in \mathrm{st}(M_4)$.

По лемме 3 и следствию 3 все точки s' с условием $\|s' - x_1\| \notin [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$ не содержатся в множестве $\mathrm{st}(M_4)$.

(б) Зафиксируем еще и число $R_2 \in [A(R_1), B(R_1)]$ и докажем, что $\cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i) \neq \varnothing$ при $R_4 = \|x_1 - x_4\| - R_1$, $R_3 = \|x_2 - x_3\| - R_2$. Необходимо проверить неравенства $R_i + R_j \geqslant \|x_i - x_j\|$, $i = 1, 4$, $j = 2, 3$.

Заметим, что $R_1 + R_2 \geqslant R_1 + A \geqslant R_1 + \|x_1 - x_2\| - R_1 = \|x_1 - x_2\|$ и $R_4 + R_3 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - R_2 \geqslant \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - B \geqslant \|x_1 - x_4\| - R_1 + \|x_2 - x_3\| - (\|x_2 - x_3\| - \|x_3 - x_4\| + \|x_1 - x_4\| - R_1) = \|x_3 - x_4\|$. Аналогично $R_4 + R_2 = \|x_1 - x_4\| - R_1 + R_2 \geqslant \|x_1 - x_4\| - R_1 + A \geqslant \|x_2 - x_4\|$ и $R_1 + R_3 = R_1 + \|x_2 - x_3\| - R_2 \geqslant R_1 + \|x_2 - x_3\| - B \geqslant \|x_1 - x_3\|$.

Таким образом, сферы $S(x_i, R_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, попарно пересекаются. Значит, в силу свойства n.2.I.P. и равенства $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \max(M_4) = |\mathrm{st}|(M_4)$ для каждого R_2 найдется $s \in \mathrm{st}(M_4)$ с условием $\|x_2 - s\| = R_2 \in [A, B]$ при фиксированном расстоянии $R_1 = \|x_1 - s\|$.

Теорема доказана.

Числа $R_i = \|x_i - s\|$, $i = 1, 2, 3, 4$, с условием $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = |\mathrm{st}|(M_4)$ задают подмножество $\{s \in X : \|s - x_i\| = R_i,\ i = 1, 2, 3, 4\} = \cap_{i=1}^4 S(x_i, R_i)$ в $\mathrm{st}(M_4)$.

Теорема 2. *Пусть пространство X предуально к L_1, $M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Тогда*

$$\mathrm{st}(M_4) = \bigcup_{\substack{R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m] \\ R_2 \in [A(R_1), B(R_1)]}} \big(S(x_1, R_1) \cap S(x_2, R_2) \cap S(x_3, \|x_2 - x_3\| - R_2) \cap S(x_4, \|x_1 - x_4\| - R_1)\big).$$

Доказательство. В условиях теоремы множество точек $s \in \mathrm{st}(M_4)$, удаленных от x_1 на расстояние $R_1 \in [r_1^m, \|x_1 - x_4\| - r_4^m]$, есть в точности множество $\big(S(x_1, R_1) \cap S(x_4, \|x_1 - x_4\| - R_1)\big) \cap \big(\cup_{R_2 \in [A(R_1), B(R_1)]}(S(x_2, R_2) \cap S(x_3, \|x_2 - x_3\| - R_2))\big)$ по теореме 1, (б) и по представлению $\mathrm{st}(M_4) = m[x_1, x_4] \cap m[x_2, x_3]$. Отсюда и из теоремы 1, (а) получается утверждение теоремы 2.

Теорема доказана.

Приведем еще один пример построения точек Штейнера четырехэлементного множества.

Утверждение. *Пусть пространство X предуально к L_1, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset X$, $z \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $s \in \mathrm{st}(x_i, x_j, z)$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$, $j = 2$. Если $s = z$, то утверждение тривиально. Если величина $\|x_1 - x_2\|$ входит в выражение $\max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$, то $s = z$.

Пусть $s \neq z$ и $\max(M_4) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$. Напомним, что $\|x_1 - z\| = \|s - z\| + \|x_1 - s\|$, $\|x_2 - z\| = \|s - z\| + \|x_2 - s\|$ в силу определения s и z по лемме B. Тогда $\|x_4 - x_1\| = \|x_4 - z\| + \|x_1 - z\| = \|x_4 - z\| + \|s - z\| + \|x_1 - s\| \geqslant \|x_4 - s\| + \|x_1 - s\| \geqslant \|x_4 - x_1\|$, т.е. $\|x_4 - s\| = \|s - z\| + \|x_4 - z\|$. Аналогично $\|x_3 - s\| = \|s - z\| + \|x_3 - z\|$. Следовательно, $\sum_{i=1}^4 \|x_i - s\| = \sum_{i=1}^4 \|x_i - z\|$, т.е. $s \in \mathrm{st}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Утверждение доказано.

2. В связи с многозначностью отображения $\mathrm{St}_n : (x_1, \dots, x_n) \to \mathrm{st}(x_1, \dots, x_n)$ естественно возникает вопрос о существовании хорошей выборки из этого отображения. Липшицевым выборкам из этого отображения в произвольных пространствах посвящена работа [7]. В пространстве l_∞^n липшицева выборка из отображения St_n существует (теорема 1 из [7]), но явно не построена. В произвольных бесконечномерных предуальных к L_1 пространствах о существовании липшицевых выборок автору ничего не известно, кроме примера липшицевой выборки из St_3 в пространстве $C[K]$ действительнозначных, непрерывных на компакте K функций, построенного в [6]. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема C [6]. *Пусть $x_1, x_2, x_3 \in C[K]$. Отображение $(x_1, x_2, x_3) \to V(t) = \min\{x_i(t) + r_i,\ i = 1, 2, 3\}$ является липшицевой выборкой из отображения* St_3 (*здесь $r_i = r_i(x_1, x_2, x_3)$ — числа из леммы* B).

Докажем аналогичную теорему для отображения St_4. Для четверки точек $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = M_4 \subset C[K]$ при $r_1 = r_1^m$, $r_2 = \|z_1 - z_2\| - r_1^m$, $r_3 = \|z_1 - z_3\| - r_1^m$, $r_4 = \|z_1 - z_4\| - r_1^m$ рассмотрим множество $\cap_{i=1}^4 S(z_i, r_i) = \{s(t) \in C[K] : s(t) \in \big[\max_i\{x_i(t) - r_i\}, \min_i\{x_i(t) + r_i\}\big], t \in K\}$ (которое лежит в множестве $\mathrm{st}(M_4)$ по замечанию 2). Для каждой точки $t \in K$ выберем наибольшее значение: будем рассматривать функцию $V(t) = \min\{x_i(t) + r_i,\ i = 1, 2, 3, 4\}$.

Теорема 3. *Пусть* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C[K]$. *Отображение* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to V(t) = \min_{i=1}^4\{x_i(t) + r_i\}$ *является липшицевой выборкой из отображения* St_4 *при* $r_1 = r_1^m$, $r_i = \|x_i - x_1\| - r_1$, $i = 2, 3, 4$.

Доказательство. То, что отображение $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to V(t)$ — выборка из St_4, следует из леммы 2 и замечания 2.

Рассмотрим две четверки точек $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $M_y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Пусть

$$r_1 = r_1^m(x_1, x_2, x_3, x_4),\ r_1' = r_1^m(y_1, y_2, y_3, y_4),\ r_i = \|x_1 - x_i\| - r_1,\ r_i' = \|y_1 - y_i\| - r_1',$$

$$s(t) = \min_i\{x_i(t) + r_i\} \in \mathrm{st}(M_x),\ s'(t) = \min_i\{y_i(t) + r_i'\} \in \mathrm{st}(M_y).$$

Оценим разность $|r_1 - r_1'|$. Для этого расмотрим два случая.

1) Пусть $\max(M_x) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$ и $\max(M_y) = \|y_1 - y_4\| + \|y_2 - y_3\|$. Тогда $r_1 = r_1^{(23)}(M_x) = \frac{1}{2}(\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| - \|x_2 - x_3\|)$, $r_1' = r_1^{(23)}(M_y) = \frac{1}{2}(\|y_1 - y_2\| + \|y_1 - y_3\| - \|y_2 - y_3\|)$ и $|r_1 - r_1'| \leqslant \frac{1}{2}\big(\big|\|x_1 - x_2\| - \|y_1 - y_2\|\big| + \big|\|x_1 - x_3\| - \|y_1 - y_3\|\big| + \big|\|y_2 - y_3\| - \|x_2 - x_3\|\big|\big)$. Заметим теперь, что

$$\big|\|x_n - x_m\| - \|y_n - y_m\|\big| \leqslant \big|\|x_n - y_n\| + \|y_n - y_m\| + \|x_m - y_m\| - \|y_n - y_m\|\big| = \|x_n - y_n\| + \|x_m - y_m\|. \quad (2)$$

Тогда

$$|r_1 - r_1'| \leqslant \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| + \|x_3 - y_3\| \leqslant \sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|. \quad (3)$$

2) Пусть $\max(M_x) = \|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|$, а $\max(M_y) = \|y_1 - y_2\| + \|y_3 - y_4\|$ (без ограничения общности), и пусть без ограничения общности $r_1 \leqslant r_1'$. Тогда $|r_1 - r_1'| = r_1' - r_1 = r_1^{(34)}(M_y) - r_1^{(23)}(M_x) \leqslant r_1^{(23)}(M_y) - r_1^{(23)}(M_x)$ по лемме 1 и применимы оценки из предыдущего случая — неравенство (3) выполнено.

Заметим теперь, что $|r_i - r_i'| = \big|\|x_i - x_1\| - r_1 - \|y_i - y_1\| + r_1'\big| \leqslant \big|\|x_i - x_1\| - \|y_i - y_1\|\big| + |r_1 - r_1'| \leqslant \|x_i - y_i\| + \|x_1 - y_1\| + |r_1 - r_1'|$ по формуле (2), что не превосходит $2\sum_{j=1}^4 \|x_j - y_j\|$ в силу (3), $i = 2, 3, 4$. Таким образом,

$$|r_i - r_i'| \leqslant 2\sum_{j=1}^4 \|x_j - y_j\|,\ i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Оценим $|s(t) - s'(t)|$ в каждой точке $t \in K$. Для этого опять же рассмотрим два случая.

(а) Допустим, что $s(t) = x_i(t) + r_i$ и $s'(t) = y_i(t) + r_i'$. Тогда с учетом (4) выполнены неравенства

$$\big|s(t) - s'(t)\big| = \big|x_i(t) - y_i(t) + r_i - r_i'\big| \leqslant \|x_i - y_i\| + |r_i - r_i'| \leqslant 3\sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|.$$

(б) Пусть теперь $s(t) = x_i(t) + r_i$ и $s'(t) = y_j(t) + r_j'$, $i \neq j$. Без ограничения общности считаем, что $\max\{x_i(t) + r_i, y_j(t) + r_j'\} = x_i(t) + r_i$. Поскольку $x_i(t) + r_i \leqslant x_j(t) + r_j$, то $|s(t) - s'(t)| = x_i(t) + r_i - y_j(t) - r_j' \leqslant x_j(t) + r_j - y_j(t) - r_j' \leqslant \|x_i - y_i\| + |r_i - r_i'|$, что с учетом (4) не превосходит $3\sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|$.

Таким образом, $\|s - s'\| \leqslant 3\sum_{i=1}^4 \|x_i - y_i\|$, т.е. отображение V — липшицева выборка из отображения St_4 с константой Липшица не более 3.

Теорема доказана.

Нетрудно доказать, что отображение $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to V'(t) = \min_{i=1}^4\{x_i(t) + \rho_i\}$ задает липшицеву выборку из отображения St_4 с константой Липшица не более 2 (как и в примере выборки из St_3) при

$$\rho_i = \frac{\|x_i - x_j\|}{2} + \frac{\|x_i - x_k\| + \|x_i - x_l\|}{4} - \frac{\|x_j - x_k\| + \|x_j - x_l\|}{4},$$

где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, а величина $\|x_i - x_j\| + \|x_k - x_l\|$ определяет $\max(\{x_1, x_2, x_3, x_4\})$.

Автор приносит благодарность П. А. Бородину за внимание к работе и полезные замечания.

Работа поддержана РФФИ (проект №18–01–00333) и Программой Президента РФ “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ 6222.2018.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lima A.A.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. **227**. 1–62.
2. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Can. J. Math. 1955. **7**, N 4. 552–561.
3. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. **48**. 1–112.
4. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. **205**, № 4. 3–19.
5. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. **207**, № 8. 31–46.
6. *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. № 6. 26–31.
7. *Беднов Б.Б., Бородин П.А., Чеснокова К.В.* Липшицевы выборки из отображения Штейнера // Матем. сб. 2018. **209**, № 2. 3–21.

Поступила в редакцию
20.02.2019

УДК 512.813.52+517.955.4+517.983.37+517.987.4+519.216.22

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ИНТЕГРАЛ ВИНЕРА

С. В. Мамон[1]

Изучаются вопросы, связанные с приложениями функциональных интегралов к эволюционным уравнениям, в частности с нахождением представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на трехпараметрической группе Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$ в виде интеграла Винера в пространстве траекторий из $C[0,t] \times C[0,t]$.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, интеграл Винера, сублапласиан, марковский процесс на группе Гейзенберга, однопараметрическая полугруппа операторов, производящий оператор полугруппы, формула Фейнмана–Каца.

The issues related to applications of functional integrals to evolution equations are studied. In particular, this is the problem of representation of solutions to the Cauchy problem for the heat equation in the three-parameter Heisenberg group $H_3(\mathbb{R})$ in terms of Wiener integral in the space of trajectories from $C[0,t] \times C[0,t]$.

Key words: Heisenberg group, Wiener integral, sub-Laplacian, Markov process in Heisenberg group, one-parameter semigroup of operators, infinitesimal operator of semigroup, Feynman–Kac formula.

В 1976 г. А. Хиланикья в работе [1], а затем в 1977 г. Б. Гаво в работе [2] вычислили тепловое ядро, отвечающее сублапласиану на группе Гейзенберга $H_{2n+1}(\mathbb{R})$, с применением техники преобразования Фурье. Также вопрос о нахождении теплового ядра на $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ рассматривался у С. Ватанабе в работе [3], где оно находилось с использованием исчисления Маллявена. В работе автора [4] было показано, как это тепловое ядро может быть вычислено с помощью свойств дельта-функции Дирака в комбинации с идеей интегрирования относительно меры Винера на множестве траекторий двумерного винеровского процесса на $\mathbb{R}^2$. Для этого был рассмотрен случайный процесс $\mathbf{r}(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau), z^+(\tau)\big)$, где $x(\tau), y(\tau)$ — независимые винеровские процессы, а $z^+(\tau)$ — ориентированная площадь на плоскости Oxy, заметаемая радиусом-вектором с координатами $\big(x(\tau), y(\tau)\big)$. Было получено представление переходной плотности этого процесса в виде интеграла Винера в пространстве $C[0,t] \times C[0,t]$. Далее, с помощью этого представления была установлена гейзенберговская

[1] *Мамон Сергей Владимирович* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sergey.mamon.msu@yandex.ru.

Mamon Sergei Vladimirovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.